Bevölkerungsdynamische Vergleichsrechnung

von Dr. Rainer Facius

zu den demographischen Berechnungen in Kapitel 5 bis 7 der Ausarbeitung „Die vielfach angezweifelten großen Zahlen im Alten Testament – Eine kontextbasierte Neubewertung“ von Michael Künzler (im Folgenden Autor)

Zusammenfassung

Ziel dieses Anhangs ist zu prüfen, mit welchen bevölkerungsdynamischen Annahmen die Bevölkerungszahlen als Ergebnis einer ‘normalen‘ Bevölkerungsentwicklung darstellbar sind, die aus der hier vorgeschlagenen Übersetzung des Schlüsselwortes ÄLäPh bzw. seiner Aufspaltung in unterschiedliche Größeneinheiten rekonstruiert werden können, so wie sie der Ägyptologe Flinders Petrie ursprünglich in die Diskussion eingeführt hat und wie sie später und auch durch den Autor hier weiterentwickelt wurde. Siehe dazu die ausführliche Diskussion und Referenzen in /1/. Zugleich wird versucht, einen Vertrauensbereich zu schätzen für die mit solchen Annahmen berechneten Zahlen für die Größe der Exodus-Population. Dabei darf „Vertrauensbereich“ nicht im üblichen statistischen Sinn verstanden werden.

Die Bevölkerungsentwicklung wird mit elementaren „Erhaltungsgleichungen“ von Jahr zu Jahr durch die Dauer des 215-jährigen Ägyptenaufenthalts modelliert, ausgehend von einer nach Altersklassen und Geschlechtern gegliederten Gründerpopulation unter Verwendung von semi-empirischen Geburten- und Sterberaten. Die Modellgleichungen für die Zahl der Personen pro Altersklasse und Geschlecht in jedem Jahr werden in der Programmiersprache R programmiert und in dieser freien Software berechnet /2/. Die vom Autor entsprechend <u>seiner</u> Entschlüsselung aus dem AT erarbeiteten Zahlen werden als Ausgangspunkt übernommen

Mit diesen Zahlen aus dem ersten Zensus (Num. 1 - 4) kann die Größe der von ihm erarbeiteten Zahlen für die gesamte Exodus-Population im Rahmen der Unsicherheiten reproduziert werden mit in die Modellierung eingehenden bevölkerungsdynamischen Annahmen, gegen die keine belastbaren empirischen Einwände erkennbar sind. Diese bevölkerungsdynamischen Annahmen – und insbesondere die über Sterbetabellen – decken einen Bereich ab, der wahrscheinlich die wahren Verhältnisse einschließt, unter denen die Bevölkerungsentwicklung Israels bis zum Exodus ablief.

Die vom Autor plausibel begründet Idee, die Reproduktionsrate während des Ägyptenaufenthaltes geeignet zu variieren, erweist sich hierbei als hinreichend, um auch die in Num. 3:43 vom Autor entschlüsselte Zahl der männlichen Erstgeborenen passend zur Größe der Gesamtpopulation beim Exodus zu reproduzieren. Die Menge der im Prinzip beliebig vielen Lösungen der Modellgleichungen kann dadurch erheblich eingeschränkt werden.

Als plausiblen Wertebereich für die Größe der Gesamtbevölkerung beim Exodus - genauer für die Anzahl der Nachkommen Jakobs - ergibt die Modellierung mit den vom Autor gemäß seines Übersetzungsvorschlags für das Schlüsselwortes ÄLäPh ermittelten Zahlen – <u>sowie unter Übernahme</u> seiner ansonsten als Start- und Randbedingungen festgelegten Vorgaben – Summen zwischen **104‘000 und 118‘000** Personen, einschließlich von **20‘000** Mitgliedern des Stammes Levi. Diese Unsicherheit berücksichtigt nur die Unsicherheiten hinsichtlich der altersabhängigen Sterberaten, die für die Zeit des Aufenthalts in Ägypten anzusetzen sind. Die Schätzung des Autors liegt mit **116‘000** am oberen Ende dieses Bereichs.

Unter Verletzung von zusätzliche Randbedingungen des Autors lässt sich für Sterberaten, die hier als zu hoch bzw. zu wenig plausibel ausgeschlossen werden mussten, als <u>unterste</u> Grenze die Entwicklung einer um ca. **11‘000** Personen niedrigeren Gesamtpopulation modellieren, d.h. insgesamt **93‘000** anstelle von 104‘000 Personen - einschließlich der praktisch unveränderten Zahl von **20‘000** des Stammes Levi.

Zahlen für die Exodus-Gesamtpopulation unterhalb von 93‘000 dürften bevölkerungsdynamisch nicht darstellbar sein mit der Gründerpopulation, der Entwicklungsdauer und den Zahlen, die der Autor aus Num. 1 - 4 entschlüsselt.

A. Methodik

<u>Vorbemerkung-1</u>:

Der entscheidende Unterschied der hier angewandten Methodik zu der des Autors besteht darin, dass nicht nur <u>eine</u> plausible Hochrechnung der Bevölkerungszahlen versucht wird, indem Zahlenwerte für bevölkerungsdynamische Kenngrößen gesucht werden, die sowohl die biblischen Vorgaben erfüllen als auch den zeitgenössischen Randbedingungen gerecht werden. Ergänzend wird hier untersucht, welchen Einfluss auf das Endergebnis alternative, aber ebenfalls plausible Ansätze für die bevölkerungsdynamischen Kenngrößen haben. Dazu zählen insbesondere die Altersabhängigkeit der Sterbewahrscheinlichkeiten sowie die der Geburtenraten, letztere wiederum auch gesteuert durch soziale und ökonomische Randbedingungen. Diese quantitative Abschätzung des Einflusses solcher Variabilität auf die Variationsbreite des Endergebnisses, und nur der damit verbundene Aufwand würde es erlauben, die Modellierung dieses Gutachtens als ‘wissenschaftlicher‘ gegenüber der des Autors zu bewerten. Auch die Möglichkeit, die Entwicklung auch in beliebigen Zwischenstadien überprüfen zu können, kann u.U. als wissenschaftlicher Gewinn angesehen werden. Mathematische Details, wie z.B. die Hochrechnung in 1-Jahres- anstatt in 5-Jahres Intervallen, die Beachtung der Geschlechtsabhängigkeit der Geburten- und Sterberaten, die mathematisch-analytische Berechnung der relevanten Verteilungen oder Zeitabhängigkeiten, dies alles könnte für sich genommen das Attribut ‘wissenschaftlich‘ nicht rechtfertigen – so aufwendig diese Details im einzelnen sein mögen.

- ⌘ -

Die modellhafte Überprüfung der Bevölkerungsentwicklung kann nur mit Annahmen erfolgen, für deren Überprüfung ausreichend detaillierte und belastbare Daten aus der fraglichen Epoche nicht zur Verfügung stehen. Bestenfalls kann man daher hoffen einen Rahmen abzustecken, innerhalb dessen die Rekonstruktion weiterer biblischer ‘Prüfzahlen‘ (in der revidierten Übersetzung des Autors!) gelingt. Von der Stichhaltigkeit oder der Plausibilität dieses Rahmens bzw. der Ad-hoc Annahmen, die zu seiner Konstruktion postuliert werden, wird es abhängen, ob man die bevölkerungsdynamische Modellierung als unabhängige ‘Stütze‘ der vorgeschlagenen Revision betrachten kann.

Die für die Beschreibung des Modellierungsverfahrens gewählten Zeichen und Symbole sind in **Tabelle 1** zusammengestellt.

Die sich zunächst anbietende Modellierung mit mittleren jährlichen Wachstumsraten im Sinne einer Zinseszins Vermehrung ist im vorliegenden Fall einer Population in der Gründungsphase strenggenommen nicht zulässig, da die Voraussetzung einer gleichbleibenden relativen Altersklassenbesetzung nicht erfüllt ist /3; p. 235/. Die Gleichung für das Anwachsen der Bevölkerungszahl mit einer (als konstant gedachten) jährlichen Rate **R** von $\mathbf{N_0}$ auf $\mathbf{N_J}$ nach Ablauf von **J** Jahren,

$$\mathbf{N_J = N_0 * [1 + R]^J} ,$$

kann sinnvoll zu einer Schätzung von **R** aus gegebenen $\mathbf{N_J}$ und $\mathbf{N_0}$ erst eingesetzt werden, wenn die sich entwickelnde Altersklassenverteilung eine von derjenigen der Gründerpopulation unabhängige ‘stabile‘ Altersklassenverteilung erreicht hat - ungeachtet der Tatsache, dass die Gleichung selbstverständlich nach **R** auflösbar ist. Erst dann liefert dieses Werkzeug der asymptotischen mittleren Wachstumsrate der Wirklichkeit entsprechende, interpretierbare Werte.

Bis zur Entwicklung einer stationären Altersklassenverteilung kann die Bevölkerungsentwicklung nur durch altersspezifische Fruchtbarkeits- und Sterberaten modelliert werden. In der Abwesenheit von Migration bestimmen dann nur diese beiden Raten die Entwicklung der Bevölkerungszahlen. Natürlich können diese Raten während der Entwicklung sich verändern, wie sie das auch in realen Populationen ständig tun.

B. Erforderliche Daten

Für den Zeitraum der Entwicklung wird die in Abschnitt 5.1.2 begründete Dauer von 215 Jahren angesetzt, d.h. der Exodus findet zu Beginn des Jahres 216 nach Einwanderung statt.

Ausgangsbasis für die Modellierung der Bevölkerungsentwicklung ist eine nach Geschlecht und Alter gegliederte Aufstellung der Population bei der Immigration nach Ägypten, der Gründerpopulation.

Die Alterseinteilung wie die Aufenthaltsdauer werden in ganzzahlige Altersklassen bzw. Aufenthaltsjahre eingeteilt. Die Modellierung überführt die Besetzungszahlen der Altersklassen von einem Aufenthaltsjahr zum nächsten, indem die durch Sterbefälle eingetretenen Verluste abgezogen und die Überlebenden im Folgejahr in die jeweils nächsthöhere Altersklasse überführt werden. Die Zahl der in einem Jahr geborenen Kinder wird abschließend - nach dem Geschlechtsverhältnis aufgeteilt - in die Altersklasse 1 des Folgejahrs überführt.

Neben dieser nach Geschlecht und Alter gliederten Aufstellung der Gründerpopulation werden Daten benötigt, mit denen die Häufigkeit der Todesfälle pro Jahr sowie Zahl der Lebendgeburten modelliert werden kann.

1. Geburtenraten

Zur Begriffsbestimmung: „**Fertilität** ist die biologische Fähigkeit, Kinder zu erzeugen und auszutragen. Fruchtbarkeit (**Fekundität**) ist die fallweise Realisierung dieser Fähigkeit (im angelsächsischen demographischen Schrifttum haben die beiden Begriffe fertility und fecundity eine genau vertauschte Bedeutung).“ /3, p.154/, eigene Hervorhebung.

I. Naturbedingte Daten

I-a: Lebensalter-spezifische Fekundität von gebärfähigen Frauen

I-b: dauerhafte Unfruchtbarkeit von Männern und Frauen

I-c: Geschlechterverhältnis bei Geburt

a) Altersverteilung der Geburtenraten:

Der mit Abstand wichtigste Parameter, die Gesamtzahl der Kinder pro Frau, hängt maßgeblich auch von dem für die Vermehrung genutzten Bruchteil der fruchtbaren Jahre der Frau ab. Abstrahiert man von den in den industrialisierten Ländern heute dominierenden soziologischen Einflüssen auf die relative zeitliche Verteilung der Geburtenzahlen zwischen dem 15. und 51. Lebensjahr der Frau (**Abb. AF-1**, /4/), so kann man diese Verteilung als eine biologische 'Konstante' postulierten. Insbesondere das Alter, in dem das erste Kind geboren wird hängt auch in noch weniger industrialisierten Ländern maßgeblich vom Wohnsitz (ländlich/städtisch) und - damit wiederum verknüpft - vom Bildungsniveau ab (**Abb. AF-2**, /4/). Der Verlauf der Kurve in **Abbildung AF-3** repräsentiert die vom Lebensalter abhängige spezifische Fekundität für eine Population, in der die naturgegebenen Faktoren als noch dominierend angesehen werden können. Kambodscha, dessen Bevölkerung zur Zeit dieser Erhebung zu weniger als 20% von Industriearbeit lebt /6/, wird hier nur als ein qualitatives Muster präsentiert für die zeitliche Verteilung der Geburten. Die **Abbildung AF-4** zeigt einen Verlauf, der dieser empirischen Vorlage ausreichend ähnelt, wobei aber die ersten Kinder erst im 21. Lebensjahr der Frauen geboren werden. Diese Abbildung berücksichtigt bereits die vom Autor als „Zwangsbedingung" vorgegebene Einschränkung, dass in der Thora das Regel-Heiratsalter bei 20 Jahren liegt und damit frühestens im 21. Lebensjahr die Frau ihr erstes Kind gebiert. Die Verteilung ist einer "zensorisierten" Weibull Verteilung nachempfunden. Die Zahlenwerte sind so normiert, dass die Summe über alle Einzelwerte 1 ergibt. Eine Kohorte von 1000 fruchtbaren Frauen, die alle die fruchtbaren Jahre durchlebt haben, hat mit dieser normierten Verteilung am Ende somit 1000 Kinder geboren. Hauptsächlich diese Verteilung der Geburten wird für die Simulation der Bevölkerungsentwicklung herangezogen. Dabei kann dann aber noch das Alter bei Beginn der Vermehrung variiert werden. Der Vergleich mit **Abbildung AF-3** zeigt, dass mit der Begrenzung ab 21 Jahren ein nicht vernachlässigbarer Teil der biologischen Möglichkeit für die Vermehrung ausfällt.

b) Unfruchtbarkeit

Dauerhafte Unfruchtbarkeit von Männern und Frauen zusammen wird mit dem Wert des Autors von u = 5,3% übernommen, der sowohl männliche wie weibliche Unfruchtbarkeit umfassen soll. Der entsprechende Bruchteil fruchtbarer Paare, **f**, ist **f** = 100 – u = **94,7**%.

c) Geschlechterverhältnis bei Geburt

Das heute mehr oder weniger universell beobachtbare Verhältnis von **105:100** zwischen der Anzahl männlicher und weiblicher Neugeborenen wird auch für die Zeit des Ägyptenaufenthalts postuliert. Daraus ergibt sich der Anteil von $\mathbf{v_w}$ = 1/(1+1.05) weiblichen und $\mathbf{v_m}$ = 1.05/(1+1.05) männlichen Kindern unter den Neugeborenen jedes Jahres.

II. Zivilisatorische Randbedingungen

II-a: (Soziale) Kontrolle des Zeugungsverhaltens

II-b: Zahl der Kinder pro fruchtbarer Frau

a) Zeugungsverhalten

Im Kontext biblischer Ordnungen wird postuliert, dass Vermehrung (im Wesentlichen) nur in durch Eheschließung legitimierten Paarbeziehungen stattfindet. Damit wird die Nuptialität, die Heiratsquote, **N**, der Frauen ein erster Faktor, der die Zahl potentieller Mütter und damit die Geburtenzahl beeinflusst. Ein Wert von **2,0%** für den Anteil von prinzipiell fruchtbaren aber nicht vermittelbaren Frauen wird dafür vom Autor übernommen und legt somit eine Obergrenze für **N** von $\mathbf{N_0}$ = **0,98** fest. Der Autor begründet des weiteren, dass im Regelfall Ehen frühestens in der Altersklasse $\mathbf{a_v}$ = 20 geschlossen werden. Die Altersklasse, ab der Frauen gebären ist damit $\mathbf{a_v + 1}$ womit ca. sechs Jahre der biologischen Fruchtbarkeit ab der Altersklasse 15 entfallen. Diese Einschränkung schließt nach **Abbildung AF-2** einen Lebensabschnitt aus, in dem in jungen, „wachsenden“ Populationen schon bis zu 50% der Frauen und mehr ihr erstes Kind bereits geboren haben /5/. Zusätzlich wird postuliert, dass in den letzten Dekaden vor dem Exodus die Heiratsquote **N** unter diesen ansonsten wohl nahe der Obergrenze von **0,98** liegenden Wert merklich herabsank. Besonders die inzwischen erreichten hohen Werte für die Bevölkerungsdichte werden einen hemmenden Einfluss auf die Heiratsquote ausgeübt haben, wenn auch unter Umständen mit nur aufschiebender Wirkung.

b) <u>Zahl der Kinder pro fruchtbarer Frau</u>

Prinzipiell lässt die weibliche Fertilität zwischen ca. dem 15. und 51. Lebensjahr bei optimalen Lebensbedingungen und entsprechender gesundheitlicher Konstitution eine Gesamtzahl von Kindern zu, die weit über den heute realisierten „Totalen Fekunditätsraten“ liegen. Werte von 12 und mehr Kindern pro Mutter schöpfen diese Grenze immer noch nicht aus. Dem Gutachter persönlich bekannt ist eine Mutter - heute bei guter Gesundheit in ihren Mittsechzigern - deren insgesamt 16 Kinder inzwischen mehr als 60 Enkel großziehen. Heute wie damals haben aber zivilisatorische Randbedingungen wie z.B. begrenzte Nahrungsversorgung oder Wohnraum die Gesamtzahl der Kinder einer Mutter maßgeblich beeinflusst und weit unter der biologisch möglichen Zahl gehalten. Abweichend von der üblichen Bezeichnung Fertilität bzw. **Fekundität** wird hier die Abkürzung „**KpM**“ für Gesamtzahl der „Kinder-pro-Mutter“ gebraucht (wobei Gleichheit nur da gegeben ist, wo jede Frau auch Mutter wird).

Während des Ägyptenaufenthalts haben sich die Lebensbedingungen stark verändert. Somit wird auch **KpM** nicht konstant geblieben sein, sondern eine Funktion der Zeit, **t**, werden. Während der anfänglichen Besiedlung unter der Regierungszeit Josephs mit den daraus resultierenden überdurchschnittlich guten Lebensbedingungen einschließlich eines großzügigen Siedlungs- und Weidelandangebots dürfte **KpM** auch überdurchschnittlich hoch gelegen haben. Umgekehrt dürfte neben der Bedrängnis der letzten Jahre vor dem Exodus vor allem auch die inzwischen erreichte hohe Bevölkerungszahl sowie die Größe der für diese benötigten Siedlungs- und Weidflächen einen dämpfenden Einfluss auf die Vermehrungsrate ausgeübt haben. Dies ungeachtet der biblischen Feststellung, dass zu Beginn der Zwangsmaßnahmen etwa 90 Jahre vor dem Exodus - d.h. ab etwa dem Jahr 125 des Ägyptenaufenthalts - diese zunächst eher das Gegenteil bewirkten.

Sowohl die Heiratsquote, N, wie auch die Fekundität, KpM, werden im Rahmen der Modellierung als frei ‘gestaltbare‘ Funktionen der Zeit, N(t) und K(t), modelliert. **Abbildung AF-5** zeigt qualitative Verläufe dieser Funktionen. Mit deren Abweichung von der jeweiligen waagerechten Linie ist es möglich, die Bevölkerungsentwicklung so zu steuern, dass neben dem vom Autor aus dem Bibeltext ermittelten primären Zahlenvorgaben auch seine sekundäre Zahlenvorgaben für weitere Teilpopulationen erfüllt werden.

Die biologisch dominierte Lebensalter-spezifische Fekundität, wie sie die **Abbildungen AF-3** und **AF-4** darstellen, kann als Realisierung von weithin unveränderlichen biologischen Eigenschaften angesehen werden. Das ist nicht möglich für die zeitliche Verteilung der zweiten entscheidenden Einflussgröße, der Sterberaten. Jede Beurteilung steht und fällt mit der Verwendung realistischer Sterberaten, bzw. eines Spektrums derselben, das mit großer Wahrscheinlichkeit die Realität zur Zeit des Ägyptenaufenthaltes einschließt. Im Folgenden wird versucht, ein solches Spektrum zu identifizieren.

2. Sterberaten

Verwertbare außerbiblische demographische Daten aus der Zeit vor dem Exodus, die für die Modellierung verwertbar wären, existieren nicht. Im AT angegebene demographische Informationen sind – neben der Zahl von Kindern, in der Regel nur der männlichen – auf wenige Sterbealter beschränkt sowie auf die Anzahl von Männern in bestimmten, breiteren Altersgruppen. Eine Ausnahme stellt die Zahl der männlichen Erstgeborenen zur Zeit des ersten Zensus, die ab dem ersten Lebensmonat alle noch Lebenden umfasst. Die für diesem Zeitraum genannten Sterbealter liegen alle, teilweise erheblich, über dem höchsten angegebenen Alter von ($\mathbf{a_{max}}$ =) Θ = 100 Jahren, mit denen neuzeitliche Sterbetafeln abbrechen. Grundsätzlich wird zwar die Bevölkerungsdynamik hauptsächlich durch den Verlauf der Überlebenskurve – vor allem für die Frauen - bis zu Abschluss der fruchtbaren Lebensphase bestimmt, sodass zu ihrer Modellierung zum einen die deutlich unterschiedlichen Sterberaten von Frauen und Männern zu berücksichtigen sind zum andern aber der genaue Verlauf der Sterberate oberhalb der fruchtbaren Lebensalter eigentlich zweitrangig wäre. Die Zahl der wehrfähigen Männer und vor allem die Zahl aller erstgeborenen Männer umfasst aber weitaus höhere Altersklassen, sodass auch für diese möglichst realistische Annahmen über den Verlauf der Überlebenskurve erstrebenswert sind.

Als Quelle der benötigten ausreichend detaillierten Sterberaten stehen hauptsächlich demographische Daten der europäischen Neuzeit zur Verfügung oder semiempirische, heuristisch entwickelte theoretische Modelle für die Altersabhängigkeit des Sterberisikos.

I. Theoretische Modellierung des altersabhängigen Sterberisikos

Ein brauchbares und weithin bewährtes theoretisches Modell zur Beschreibung des altersabhängigen Sterberisikos wurde von W. Siler vorgeschlagen /7/. In ihm formalisiert Siler die in **Abb. AF-6** dargestellte Systematik /7,9/, die in diesem Detail von E. Deevey Jr. beschrieben wurde /10/. **Abbildung AF-6** stellt für die unterschiedlichsten Lebewesen die Überlebenswahrscheinlichkeit, $\mathbf{S(a)}$, dar, d.h. die Wahrscheinlichkeit, die Altersklasse $\mathbf{a}$ zu überleben. In dieser Darstellung ist zu beachten, dass **(i)** die y-Achse in logarithmischer Aufteilung dargestellt ist und dass **(ii)** das Ende der x-Achse keine absolute Lebensdauer sondern die für ein Lebewesen jeweils maximale Lebensdauer markiert. Danach lassen sich in der Biosphäre beobachtbare Überlebenskurven in drei Klassen eingruppieren, wenn man das Lebensalter als Bruchteil des erreichbaren Höchstalters angibt. Insbesondere Überlebenskurven für den Menschen entsprechen weitgehend dem Typ I dieser Systematik, wie **Abbildung AF-7** anhand der deutschen Periodensterbetafel 2016-2018 demonstriert. Hier ist, wie in **Abbildung AF-6**, die y-Achse logarithmisch skaliert, wobei aber der höchste x-Wert in **Abbildung AF-6** das Alter nicht absolut sondern als Prozentwert des jeweilig erreichbaren Höchstalters angibt.

Begrifflich zerlegt Siler die komplette Überlebenskurve bzw. den zeitlichen Verlauf der entsprechenden Sterberate, $\mathbf{D}(t)$ in drei „Ausfall-“ Prozesse, die potentiell das Leben beenden. Bei der Betrachtung dieser idealisierten „intrinsischen“ Überlebenswahrscheinlichkeit wird allerdings abstrahiert von allen externen Risiken wie etwa Nahrungsknappheit, Fressfeinden (Kriege) und Katastrophen wie Seuchen oder ganze Populationen betreffende klimatisch bedingten Extremereignissen.

Zu Beginn des Lebens berücksichtigt Siler die Tatsache, dass die Ontogenese mit der Geburt noch nicht abgeschlossen ist. Sowohl der noch länger anhaltende Umbau und Reifungsprozess vieler Organe wie vor allem auch die für die Lernkurve des Immunsystems unverzichtbare Trainingsphase in der Umwelt außerhalb des Mutterleibes stellen hier das dominierende „Ausfallrisiko“, $\mathbf{d_i}(t)$, für ein ansonsten ‘gesundes‘ Kind dar: $\mathbf{d_i}(t) = \mathbf{a_0} * \exp(\mathbf{-a_1} * \mathbf{t})$. Dieses frühkindliche Risiko nimmt mit der Zeit exponentiell – exp(x) ist eine Bezeichnung für die Exponentialfunktion – mit einer Abklingrate „$\mathbf{a_1}$" ab und wird bei Erreichung der Adoleszenz vernachlässigbar gegenüber den folgenden Risiken.

Zeitlich folgt eine Periode, in der auch das mit dem eigentlichen Alterungsprozess verknüpfte Ausfallrisiko noch vernachlässigbar ist gegenüber einer vom Alter unabhängigen, zeitlich konstanten Wahrscheinlichkeit, $\mathbf{d_a}$, des tödlichen „Unglücksfalls" eines Individuums wie z.B. fatale Stürze oder Vergiftungen: $\mathbf{d_a} = \mathbf{c}$.

Diese Basis-Sterberate $\mathbf{d_a}$ wird im Verlauf des Alterns anschließend wieder vernachlässigbar gegen das mit der Zeit exponentiell mit der Rate „b_1" anwachsende Sterberisiko, $\mathbf{d_S}(t)$, durch ein das Leben beendende Organversagen: $\mathbf{d_S}(t) = \mathbf{b_0} * \exp(\mathbf{b_1} * t)$. Die sich bei den für die permanente Erneuerung der Gewebe notwendigen Zellteilungen anhäufenden Kopierfehler in den kopierten Genen führen schleichend aber irreversibel zu beständig abnehmender Funktionalität der Zellen. Bei Überschreiten einer kritischen Schwelle versagt dann das entsprechende Organ. Ist dies ein lebenswichtiges Organ, dann

tritt der Tod ein. Im Lichte dieser Deutung ist die Lebensspanne diejenige Zeit, die verstreichen muss, bis eine kritische Schwelle an funktionsgeschädigten (dysfunktionalen) Zellen erreicht wird.

Formal lässt sich das Siler'sche Modell (mit der Exponentialfunktion exp(x) und in der Notation von /11/) schreiben als:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{d_i}(t) + \mathbf{d_a} + \mathbf{d_S}(t) = \mathbf{a_0} * \exp(-\mathbf{a_1} * t) + \mathbf{c} + \mathbf{b_0} * \exp(\mathbf{b_1} * t)$$

Der Parameter $\mathbf{a_0}$ gibt hier das Sterberisiko in der ersten Zeit nach der Geburt an. Der Parameter $\mathbf{b_0}$ das schon bei der Geburt vorhandene und damit als genetische (Erb-)Last ererbte Sterberisiko. Der Parameter **c** quantifiziert das Risiko eines tödlichen 'Unglücksfalls'. Ein theoretisches maximales Lebensalter, Ω, lässt sich mit diesen Modellparametern (mit der natürlichen Logarithmusfunktion ln(x)) in sehr guter Näherung berechnen als

$$\Omega = \ln[(1 - \mathbf{c}) / \mathbf{b_0}] / \mathbf{b_1}.$$

Ab diesem Alter wäre das Sterberisiko größer 1, d.h. niemand überlebt es.

Die Tatsache, dass die genetische Erblast aller Lebewesen, $\mathbf{b_0}$, durch Mutationen kontinuierlich anwächst, führte schon vor 25 Jahren zu der Frage in dem Titel einer Fachpublikation „Warum sind wir nicht schon 100-mal ausgestorben?" /12/. In einer etwas plakativen Assoziation an den 2. Hauptsatz der Thermodynamik kommt diese Tatsache auch in dem Titel „Genetische Entropie" des Fachbuchs eines renommierten Genetikers zum Ausdruck /13/. Der Anstieg um mehr als das Zehnfache der Zahl der vererbbaren Defekte von **1'487** im Jahr 1966 auf über **15'000** im Jahr 2020 ist ein eindrucksvoller Beleg für diese Degeneration des menschlichen Erbguts /14/ (Borger, 2020) – wobei der Fortschritt der diesbezüglichen Diagnostik mit der entsprechend gesteigerten Entdeckungsrate allerdings mit zu diesem Anstieg beigetragen haben mag. Mit anderen Worten, es bestehen keinerlei wissenschaftlichen Gründe, die in der Thora genannten Lebensalter nicht für die Modellierung zu übernehmen. Der vom Autor angesetzte und für die Modellierung hier übernommene Wert von Θ = 125 Jahre mit einer Überlebenswahrscheinlichkeit bei ihm von 0.25 % erscheint allerdings angesichts der biblischen Texte als eher zu niedrig angesetzt.

Die linken Spalten in **Abbildung AF-8a** zeigen entsprechend berechnete Modell-Überlebenskurven mit Werten für die Modellparameter, die den Verlauf von empirischen menschlichen Überlebenskurven aus Sterbetabellen wiedergeben, die mit dem höchsten Tabelleneintrag von Θ = 100 Jahren enden (vgl. Fig. 1A in /15/). Für alle diese Parametersätze ist das modellmäßige Höchstalter,

Ω**,** gleich 104.6 Jahre, ungeachtet der um einen Faktor 20 variierenden frühkindlichen Sterblichkeit sowie des um einen Faktor 1'000 variierenden konstanten Risikos für einen 'Unfalltod'. (Ähnlich aber analytisch doch unterschiedlich ist der Ansatz, mit dem das Ausfallrisiko technischer Systeme modelliert wird, das in den optisch sehr ähnlichen sogenannten „Badewannenkurven" abgebildet ist /16/.) Die rechte Spalte von **Abbildung AF-8a** zeigt Überlebenskurven und Sterberaten für

eine Sterbetabelle, die mit einem Wert für Θ von 125 Jahren berechnet wurden, bei denen lediglich der Wert für b_0, dem Sterberisiko aufgrund der genetischen 'Erblast', so angepasst – und zwar erniedrigt(!) – wurde, dass das Sterberisiko $\mathbf{D}(\Theta)$ für beide Werte von Θ den gleichen Wert hat (0.55). Das zugehörige modellmäßige Höchstalter, Ω**,** ist mit diesen Parameterwerten gleich 129.6 Jahre, gemeinsam für alle anderen Parametersätze. Inhaltlich verkörpert diese Erniedrigung von b_0 die Annahme, dass die durch die Überlebenskurven der rechten Spalte repräsentierten Populationen bei ihrer Geburt mit einem geringeren genetisch bedingten Sterberisiko geboren wurden. Dieses Anfangsrisikos wächst im Lauf des Lebens dann mit der gleichen exponentiellen Wachstumsrate $\mathbf{b_1}$. Optisch spiegeln die gleichen Steigungen der Kurven in der Endphase diese Konstanz der Wachstumsrate wieder.

Für die Modellierung benötigte Sterbetafeln könnte man generieren, indem für empirische Überlebenskurven Parameterwerte des Siler-Modells angepasst werden und deren Tabellenendalter dann auf Θ = 125 Jahre wie in **Abbildung AF-8a** dargestellt transformiert werden. **Abbildung AF-8b** zeigt eine solche Anpassung des Siler-Modells an die deutsche Perioden Sterbetafel 2016-2018 für Männer. Die Abbildung demonstriert aber auch die Verletzung der erwähnten Modell Voraussetzungen, nämlich das Fehlen externer Einflüsse auf die Sterberate. Ein erster Gipfel der Suizidrate nach Einsetzen der Pubertät wie auch tödlich verlaufende Verkehrsunfälle führen zu einer signifikant höheren Sterberate. Arbeitsunfälle von Berufsanfängern in gefahrbetonten Berufen bei Männern und Schwangerschafts- und Kindbett Mortalität bei Frauen sind zusätzliche Hauptursachen für Modellabweichungen in dieser Lebensphase. Zwischen 50 und 65 Jahren zeigt die Suizidrate bei Männern einen weiteren Gipfel, der auch in **Abbildung AF-8b** angedeutet ist. Im Gegensatz dazu verzerren Altenfürsorge und Pflege – durch die Familie wie durch Einrichtungen – sowie die Fortschritte der Medizin – bis hin zur Intensivmedizin – die intrinsische Modellsterberate hin zu erniedrigten empirischen Werten der Sterbetabellen, wie es in der 8. und 9. Lebensdekade erkennbar ist. Solche Aspekte der Realität lassen sich durch Modelle nicht abbilden. Dieses Manko kann andererseits ausgenutzt werden, um die Auswirkung des wohl größten Unterschieds in den Überlebenskurven zwischen heute und damals isoliert von diesen 'Störeinflüssen' zu untersuchen, die damals sehr wahrscheinlich erheblich höhere frühkindliche Sterblichkeitsrate.

II. Empirische Daten des altersabhängigen Sterberisikos

Um auch die die Sterberaten beeinflussenden äußeren Sterberisiken zu berücksichtigen, werden ergänzend dazu empirische Überlebenskurven mit folgendem Verfahren direkt auf Θ = 125 Jahre hochskaliert und daraus die Sterberaten für die höhere Lebensspanne zurückgewonnen.

Für die konkrete Modellierung der Kindersterblichkeit mitsamt den anderen äußeren Einflüssen auf das Sterberisiko werden Daten aus historischen Sterbetabellen herangezogen, wie sie in der öffentlich zugänglichen „Human Mortality Database" zur Verfügung stehen (https://www.mortality.org/). Neben der Perioden-Sterbetabelle für die deutsche Bevölkerung 2016-2018 werden die für Schweden zugänglichen Bevölkerungsdaten genutzt, die hinsichtlich Vollständigkeit und Zuverlässigkeit sowie der Reichweite in die Vergangenheit als der „Goldstandard" der Demographie angesehen werden.

Abbildung AF-9a zeigt einen empirischen Verlauf mit einer frühkindlichen (weiblichen) Sterblichkeit von mehr als 20% nach den ersten 3 Jahren. Die nur zur besseren Veranschaulichung des Verfahrensprinzips gewählten Daten betreffen die Population von England und Wales in 1876. In **Abbildung AF-9a** ist der (ungefähre) Beginn des eigentlichen Siler'schen Sterbensprozesses $\mathbf{d_S}(t)$ bei 15 Jahren mit einer kurzen senkrechten Linie markiert. Die Rauten der roten Kurve repräsentieren die originalen Tabellenwerte, die – abgesehen vom ersten Intervall – in 5-Jahres Abständen den Bruchteil der ursprünglichen Kohorte angeben, der dieses Alter erlebte. Der letzte Tabellenwert gibt den Bruchteil derer an, die das Alter von 100 Jahren erlebten. Die „+" Zeichen zwischen den Rauten markieren Werte, die zwischen den originalen Tabellenwerten mit Hilfe einer monotonen Spline Interpolationsfunktion interpoliert wurden und damit Werte für kürzere Zeitintervalle liefern. Bis zu der Markierung bei 15 Jahren liegen die „+" Zeichen in einem 1-Jahres Abstand. Ab dann bis zu dem markierten Endwert bei 100 Jahren sind die 120 „+" Zeichen in einem Abstand d = (100 – 15) / (135 – 15) gesetzt (hier als Beispiel für einem Wert von Θ = 135 Jahren).

Abbildung AF-9b zeigt erneut die Daten der roten Kurve von **Abbildung AF-9a,** diesmal mit logarithmischer Skalierung der y-Achse anstelle der linearen in **Abbildung AF-9a.** Ersetzt man in einer der **Abbildung AF-9a** entsprechenden Sterbetabelle jetzt alle x-Werte durch 1-Jahres Intervalle, dann erhält man die violette Kurve in **Abbildung AF-9b**. Die 100% von **Abbildung AF-6** wurden gewissermaßen von absolut 100 Jahren auf 135 Jahre gesetzt. Die auf diese Weise transformierten Kurvenpunkte repräsentieren die auf diese höhere Lebensspanne transformierten Tabellenwerte, l_x, aus denen die benötigten Sterberaten, q_x, auf die übliche Weise gewonnen werden (l_x und q_x sind die üblicherweise in Sterbetabellen gebrauchten Symbole für S_a und D_a).

Die **Abbildung AF-10a** zeigt die Überlebenswahrscheinlichkeit und Sterberate, die **der Autor in seiner Anlage 8b als Tabelle 9b** in – abgesehen vom ersten Lebensjahr - 5-Jahres Intervallen für seine Berechnungen aufstellt. Der Autor unterscheidet in seinen Berechnungen nicht zwischen Männern und Frauen, wendet die Tabelle aber auch zur Berechnung männlicher (Teil-) Populationen an. Die hier aber auch benötigten Zahlen für Frauen werden aus den Werten der Anlage 8b an Hand der Verhältnisse zwischen den Sterberaten konstruiert, die sich aus den Überlebenswahrscheinlichkeiten der in **Abbildung AF-7** gezeigten deutschen Sterbetabelle ergeben. **Abbildung AF-10b** zeigt die auf dieses Weise ermittelten Sterberaten, mit denen dieser Ansatz des Autors hier übernommen wird. Die roten Kurven demonstrieren die höhere Lebenserwartung von Frauen gegenüber der der Männer, die mit den blauen Kurven gezeigt werden.

Die deutsche Sterbetabelle DE2016-2018 repräsentiert eine äußerst geringe frühkindliche Sterblichkeit, die unter den damaligen Verhältnissen bei weitem nicht erreichbar gewesen sein dürfte. Die Perioden-Sterbetabelle für die schwedische Bevölkerung 1860 (und erst recht die für 1751) repräsentiert demgegenüber eine frühkindliche Sterblichkeit, die diejenige in Gosen vermutlich übertraf. **Abbildung AF-11** zeigt oben diese beiden extremen Sterberaten bzw. Sterbewahrscheinlichkeiten, $\mathbf{D_a}$, die jeweils entsprechend dem in den **Abbildungen AF-9a und 9b** dargestellten Verfahren auf den Tabellenendwert von Θ = 125 Jahren skaliert wurden. Die in **Abschnitt 5.2.4 (Anlage 8b, Tabelle 9b) vom Autor** bereits für dieses maximale Lebensalter postulierte Sterbetabelle, Kuenzler_m, liegt zwischen diesen Extremen. Zusätzlich zu Schweden-1860 werden weitere vier empirische Sterberaten für die Jahre 1895, 1930, 1950 und 1985 gewählt, die den Bereich zwischen den Extremen ausfüllen. **Abbildung AF-11** zeigt unten die zu den gezeigten Sterberaten $\mathbf{D_a}$ gehörigen Überlebenskurven bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten, $\mathbf{S_a}$.

Die Sterberaten und Überlebenswahrscheinlichkeiten für Schweden-1751 werden in **AF-11** als Extremfall angezeigt, für den zwar immer noch Lösungen für eine Modellierung der Bevölkerungsentwicklung möglich sind, die die primären und sekundären Zahlenvorgaben des Autors erfüllen könnten. Dies bei einer mittleren Wachstumsrate für Stämme ohne Levi von unter 3%, dies jedoch nur unter Verletzung seiner zusätzlichen Forderung, dass die biologisch mögliche und generell auch gerade in sich entwickelnden Gesellschaften übliche Vermehrung erst ab dem 20. Lebensjahr der Frau genutzt wird.

III. Semi-empirische altersabhängige Sterberaten

Abbildung AF-12 zeigt oben neben den vom Autor benutzten Sterberaten (Kuenzler_m) mit der grünen Kurve die Siler-Modell Sterberate für die männliche Streberate der deutschen Periodensterbetafel 2016-2018 aus Abb. AF-8b sowie drei weitere, in denen nur die frühkindlichen Sterberaten bis zu 5 Jahren um Faktoren bis zu 38 erhöht wurden Für die höheren Alter werden ab 5 Jahren die Werte für die deutsche Siler-Model Sterberaten übernommen. Unterschiede in den Ergebnissen der Modellierung mit diesen Sterberaten spiegeln somit ausschließlich den Einfluss der frühkindlichen Sterblichkeit auf die Bevölkerungsentwicklung wieder.

IV. Bestimmung der überlebenden Erstgeborenen

Die in den **Abbildungen AF-6** bis **AF-10** gezeigten Überlebenswahrscheinlichkeiten, **S(a)**, werden nicht nur benötigt, um historische Sterbetafeln auf die größeren Lebensspannen zu transformieren, wie sie die Abb. **AF-12** und **AF-11** zeigen. Sie werden des weiteren benötigt zur Ermittlung der noch lebenden Erstgeborenen, deren Zahl beim ersten Zensus erhoben wird.

Wenn $\mathbf{L_j}$ Kinder im Jahr **j** lebend geboren wurden, dann ist deren Zahl, $\mathbf{{}^J L_j}$**,** in einem späteren Jahr **J** (J > j , und J≤216) abgefallen auf

$$\mathbf{{}^J L_j = L_j * S(J\text{-}j)}.$$

Dabei ist **S(J-j)** die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind des Geburtsjahres **j** die Altersklasse **k = J - j** erreicht (k<=$\mathbf{a_{max}}$, dem höchsten in der Sterbetabelle erfassten Lebensalter). Die Zahl aller in einem Jahr **J** in den Altersklassen von **i** bis **k** noch Lebenden (der „Rest“), $\mathbf{{}^{i,k}R_J}$, ist dann die mit **S(J-j)** gewichtete Summe aller $\mathbf{L_j}$, für die gilt: **J-i >= j >= J - k**:

$$\mathbf{{}^{i,k}R_J = sum_j(L_j * S(J\text{-}j)),}$$

$$j = j_1, j_1+1, j_1+2,\ldots, J-(i+1), J-i \quad \text{mit} \quad j_1 = \max(1, J-k)$$

Mit diesen hiermit beschriebenen Daten zu den Geburten- und Sterberaten wird die Entwicklung der Gründerpopulation zur Exodus-Population modelliert.

3. Gründerpopulation

Im **Abschnitt 5.5.4 (Anlage 9a, Tabelle 10a) des Autors** werden die Altersverteilungen für zwei Gründerpopulationen erarbeitet.

Die eine, die größere, repräsentiert die Nachkommen Jakobs ohne den Stamm Levi. Mit Joseph, dessen zwei Söhne Manasse und Ephraim als eigene „Stammväter“ geführt und mit ihren Nachkommen später als eigenständige Stämme geführt werden, umfasst diese bei weitem größere Gründerpopulation auch zwölf Stämme. Die anhand der biblischen Angaben erarbeitete Anzahl von 128 Personen von je 64 Männern und 64 Frauen wird vom Autor übernommen. Diese Gründerpopulation mit ihren Nachkommen wird im Weiteren als „DieZwölf“ apostrophiert.

Die Nachkommen Levi stellen die zweite, mit je 4 weiblichen und männlichen Personen bei weitem kleinere Gründerpopulation dar. Auf sie wird mit Levi Bezug genommen.

Mit diesen Zahlen zu den Gründerpopulationen kann der Ausgangpunkt der Modellierung als biblisch hinreichend gesichert gelten. Insgesamt stehen somit die für die Modellierung benötigten und unter **B** zusammengestellten Methoden und Daten zur Verfügung.

C. Berechnungsschema

Es folgen die im Grunde sehr elementaren Gleichungen, mit denen die Entwicklung bzw. das Wachstum der Gründerpopulation rechnerisch modelliert wird. Es sei noch einmal auf Tabelle 1 verwiesen, wo die für die Beschreibung der Berechnungen verwendeten Symbole und Abkürzungen zusammenstellt sind. Da die Bevölkerungsentwicklung mit diskreten Zeitintervallen von einem Jahr modelliert wird, wird die obige stetige Zeitvariable **t** ersetzt durch die diskrete Variable **j**, die die Zahl der Jahre abzählt vom Jahr j=1, dem Einzugsjahr, bis zum Jahr j=216, dem Auszugsjahr. Dann sind 215 Jahre der Bevölkerungsentwicklung verstrichen. Zur besseren Übersichtlichkeit wird zunächst die Geschlechtsspezifität ignoriert.

1. Herleitung der Modellgleichungen

Ausgehend von der Zahl der Personen zu Beginn eines Jahres **j**, $\mathbf{P_j}$, lässt sich die Zahl der Personen im Folgejahr **j+1**, $\mathbf{P_{j+1}}$, bestimmen als:

$$\mathbf{P_{j+1} = P_j + Z_j} \,,$$

wobei $\mathbf{Z_j}$ die Größe des Zuwachses im Jahr **j** angibt.

Solange $\mathbf{Z_j}$ positiv ist, wächst die Bevölkerung. Bleibt sie negativ, wie es für die einheimische Bevölkerung in den meisten europäischen Ländern seit längerem der Fall ist, so geht dieser Bevölkerungsanteil der Auflösung entgegen.

In der Abwesenheit von Migration - und das wird hier für die Nachkommenschaft Jakobs vorausgesetzt - gilt für den Zuwachs eines Jahres $\mathbf{Z_j}$

$$\mathbf{Z_j = L_j - T_j}$$

wobei $\mathbf{L_j}$ die Zahl der Lebendgeborenen und $\mathbf{T_j}$ die Zahl der Todesfälle dieses Jahres **j** angibt.

Insgesamt wird die Bevölkerungszahl des Folgejahres **j+1**, $\mathbf{P_{j+1}}$, aus der des Ausgangsjahres **j**, $\mathbf{P_j}$, bestimmt als:

$$\mathbf{P_{j+1} = P_j + Z_j = P_j + L_j - T_j}\,.$$

Abbildung AF-13 veranschaulicht den rechnerischen “Wachstumsprozess“ und ergänzt das durch die Abhängigkeit vom Lebensalter. Um das mit zu beschreiben, muss die vorherige Gleichung ergänzt werden durch diese Altersabhängigkeit:

$$\mathbf{P_{1,j+1} = L_j} \quad \text{und} \quad \mathbf{P_{a+1,j+1} = P_{a,j} - T_{a,j}} \quad ,$$

wobei **a** die jeweilige Altersklasse von a=1 bis a=$\mathbf{a_{max}}$ angibt.

Personen der Altersklasse **a** werden im Folgejahr **j+1** in der Altersklasse **a+1** erfasst. Die im Jahr **j** lebend Geborenen L_j besetzen im Aufenthaltsjahr **j+1** die Altersklasse **a=1**.

Die Altersabhängigkeit der Sterbefälle wird durch die bereits diskutierten Sterbewahrscheinlichkeiten oder Sterberaten, D_a , beschrieben, wie sie in den **Abbildungen AF-12 und AF-11** zu sehen sind. Mit ihnen ergeben sich die im Jahr **j** in der Altersklasse **a** Versterbenden zu

$$T_{a,j} = P_{a,j} * D_a .$$

Es wird postuliert, dass die in einer gewählten Sterbetafel erfasste Sterberate D_a für die 215 Jahre der Bevölkerungsentwicklung unverändert bleibt.

Die Zahl der lebend Neugeborenen lässt sich analog mit den vom Lebensalter der Mütter im Jahr **j** abhängigen Geburtenzahlen, $G_{a,j}$, bestimmen zu

$$L_j = \text{sum}_a(G_{a,j}).$$

Die Schreibeweise $\text{sum}_a(G_{a,j})$ ist ‘Kurzschrift‘ für die Rechenoperation: summiere alle Ausdrücke in der Klammer mit dem Subskript a über alle zulässigen Werte von a**.** Die Geburtenzahlen, $G_{a,j}$, werden von zwei Faktoren bestimmt, der Zahl der potentiellen Mütter dieses Jahres sowie der Zeugungsrate, die in dieser Phase des Aufenthalts in den jeweiligen Altersklassen realisiert wird. Wie postuliert, wird die Zahl der potentiellen Mütter wesentlich von der Heiratsquote **N** bestimmt. Deren Zeitabhängigkeit wird modelliert durch eine Funktion **N(t)** (**Abb. AF-5**), einen Reduzierungsfaktor der maximalen Heiratsquote von N_0 **=0.98**, die die zur Zeit **t** ‘übliche‘ Heiratsquote angibt und die den überwiegenden Teil der Aufenthaltsjahre **j** den Wert 1 hat während sie erst gegen Ende unter 1 abfällt. Für die Frauen der Altersklasse $a > a_v$ ist im Jahre **j** allerdings die Heiratsquote $N_{a,j}$ anzusetzen, die $a - a_v$ Jahre vor dem Jahr **j** üblich war, da bestehende Ehen fortbestehen, d.h.

$$N_{a,j} = N_0 * N(t=j – (a-a_v)) .$$

Multiplikation der Zahl der Frauen $W_{a,j}$ mit $N_{a,j}$ sowie mit dem Bruchteil, **f**, der fruchtbaren Paare ergibt die Zahl $F_{a,j}$ der potentiellen Mütter des Jahres **j** in den jeweiligen Altersklassen **a**.

$$F_{a,j} = W_{a,j} * N_{a,j} * f$$

$W_{a,j}$ ist hier der weibliche Anteil der Population $P_{a,j}$. Die Zahl der tatsächlichen Mütter, $M_{a,j}$, ergibt sich als Produkt von $F_{a,j}$ mit g_a^1, der Wahrscheinlichkeit, in der Altersklasse a zu gebären.

$$M_{a,j} = F_{a,j} * g_a^1.$$

Da g_a^1 auf 1 normiert ist, ergibt das allerdings die Zahl der Kinder, wenn jede Mutter in ihrem Leben genau ein Kind zur Welt bringt. Bei Frauen, die genau ein Kind während ihres Lebens gebären, ist jede Geburt eine Erstgeburt. Somit ergibt die Summe dieser $M_{a,j}$ die Zahl der Erstgeburten, E_j, im Jahre **j.**

$$E_j = \text{sum}_a(M_{a,j})$$

Die tatsächliche Zahl der im Jahr **j** von Frauen der Altersklasse **a** geborenen Kinder, $G_{a,j}$, ergibt sich durch Multiplikation von $M_{a,j}$ mit KpM_j, der Zahl der im Jahr **j** ‘üblichen‘ Zahl der Kinder-pro-Mutterleben, die die von äußeren Bedingungen beeinflusste Zeugungstätigkeit repräsentiert. Die postulierte Abhängigkeit wird wie bei der Heiratsquote als Produkt einer ‘mittleren‘ Zahl der Kinder-pro-Mutter, **<KpM>**, und einer von der Aufenthaltszeit **t** abhängigen Funktion, **K(t)** (**Abb. AF-5**), beschrieben.

$$\mathbf{KpM_j = <KpM> * K(\ t=j\ )}$$

Wie **N(t)** soll **K(t)** vor allem das Abflauen des Wachstums gegen Ende des Aufenthalts modellieren. In der Mitte sollen sie Werte in der Nähe von 1 liefern. Im Gegensatz zu **N(t)** könnte **K(t)** anfänglich auch Werte über 1 liefern, um die anfänglichen ‘optimalen‘ Lebensbedingungen zu reflektieren.

Damit ergeben sich die Geburtenzahlen zu

$$\mathbf{G_{a,j} = W_{a,j} * N_{a,j} * f * <KpM> * K(\ t=j\ )}$$

Insgesamt wird die Altersklassenverteilung von einem Jahr, **j**, zum nächsten, **j+1**, nach folgenden Gleichungen berechnet, beginnend mit dem Jahr j=1 und endend mit dem Jahr j=215:

$$\mathbf{P_{a+1,j+1} = P_{a,j} - P_{a,j} * D_a}\ ,\ a>1, \quad \text{und} \quad \mathbf{P_{1,j+1} = L_j = sum_a(\ G_{a,j}\ ),}$$

wobei über die fruchtbaren Altersklassen der Frau zu summieren ist. **Abbildung AF-14** stellt die Details der Modellierung der Lebendgeburten $\mathbf{G_{a,j}}$ wieder schematisch dar.

Abschließend ist daran zu erinnern, dass die Zahlen für die Geburten von männlichen und weiblichen Kindern wie auch die für das altersabhängige Sterben von Männern und Frauen sich deutlich unterscheiden. Da offensichtlich – biologisch gesehen – das Bevölkerungswachstum praktisch ausschließlich durch die Frau determiniert wird, müssen die Bevölkerungszahlen für Männer und Frauen getrennt berechnet werden. Beim Sterben berücksichtigen die gerade auch in den fruchtbaren Jahren der Frau unterschiedlichen Sterberaten die biologischen Unterschiede bereits. Für die Aufteilung der Neugeborenen auf die beiden Geschlechter werden die oben genannten Verhältnisse, $\mathbf{v_w}$ und $\mathbf{v_m}$, auf die Summen angewandt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird erst jetzt in den obigen Gleichungen der obere Index **g** eingeführt, der mit g=“w“ für weiblich und g=“m“ für männlich diese Teilpopulationen unterscheidet. Mit dem gleichen oberen Index sind ebenso die für Männer und Frauen unterschiedlichen Sterberaten, $\mathbf{D^m_a}$, und Überlebenskurven, $\mathbf{S^m_a}$, zu unterscheiden.

Das ergibt die endgültigen Gleichungen für die Modellierung:

<u>Modell-Gleichungen:</u>

$$\mathbf{P^g_{a,1} = Gr\ddot{u}nderpopulation}$$

$$\mathbf{P^g_{a+1,j+1} = P^g_{a,j} - P^g_{a,j} * D^g_a}\ ,\ a>1 \quad \text{und} \quad \mathbf{P^g_{1,j+1} = L^g_j = v_g * sum_a(\ G_{a,j}\ ),}$$

$$g = \mathbf{w, m}$$

$$\mathbf{E^m_j = v_m * sum_a(\ P^w_{a,j} * N_{a,j} * f * g_a^1\ )}$$

$$a = 1 \ldots a_{max};\ \ j = 1 \ldots 215$$

Die Darstellungen in den **Abbildungen AF-13 und AF-14** veranschaulichen den durch diese Gleichungen beschriebenen Algorithmus. Die Modell-Gleichungen in obigem Textfeld werden in einem

Unterprogramm, „Proliferate", berechnet, das als Eingangsgrößen die Gründerpopulation getrennt nach Altersklassen und Geschlecht sowie alle anderen beschriebenen Parameter empfängt. Als Ausgabe stehen nach einem solchen Berechnungszyklus über die 215 Jahre des Aufenthalts die Bevölkerungszahlen in allen Jahren und Altersklassen nach Geschlechtern getrennt zur weiteren Verarbeitung zur Verfügung. Ebenso stehen die Zahl der Todesfälle, der Neu- und der Erstgeburten nach Jahr und Altersklasse sowie gegebenenfalls nach Geschlecht getrennt zur Verfügung. Insbesondere aus den Zahlen für die Gesamtpopulationen können dann rückwirkend mittlere asymptotische Wachstumsraten für die gesamte Aufenthaltsdauer wie auch für beliebige Teilintervalle berechnet und damit beurteilt werden.

<u>Vorgabe-1 für „DieZwölf"</u>

23'550 Wehrfähige beim 1. Zensus

= 27'500 Wehrfähige zur Zeit des Exodus

<u>Vorgabe-1 für Levi</u>

10'300 männliche Leviten

Die 'mittlere' Zahl der Kinder-pro-Mutterleben, **<KpM>,** ist bei dieser Berechnung der zentrale interne Anpassungsparameter, mit dem die modellmäßige Bevölkerungsentwicklung iterativ so gesteuert werden kann, dass die aus dem Bibeltext entschlüsselten und vorgehend zusammengefassten <u>primären</u> Vorgaben für die jeweilige Teilpopulationen zur Zeit des Exodus erfüllt werden – Vorgabe-1 für „DieZwölf" = 27'500 Wehrfähige und Vorgabe-1 für Levi = 10'300 Männer und Jungen ab einem Monat. Diese Anpassung von **<KpM>** kann automatisiert werden. **Abbildung AF-15** zeigt ein Flussdiagramm für den Ablauf der Modellrechnungen, aus dem das deutlich wird.

2. Sekundäre Vorgaben

Es stellt sich heraus, dass mit jeder der gewählten Sterberaten passende Werte für **<KpM>** berechnet werden können, die die primären Vorgaben für die jeweilige Gründerpopulation erfüllen. Dies ist möglich mit beliebig vielen Kombinationen für die Wahl des Heiratsalters, $\mathbf{a_v}$, sowie der Parameter, die den Verlauf von **N(t)** und **K(t)** bestimmen, so wie sie in den **Abbildungen AF-5a und b** beispielhaft gezeigt sind. Die Tatsache, dass es möglich ist, diese primären Vorgaben zu erfüllen, sagt für sich genommen also nur wenig aus. Sowohl der Wert für <**KpM**> als auch die dadurch determinierten Werte für mittlere Wachstumsraten in bestimmten Zeitintervallen müssen in Wertebereichen liegen, die als 'realistisch' betrachtet werden können. Was realistisch ist, das bleibt letztlich aber in erheblichem Maß ein subjektives Kriterium und hat nur mäßige Überzeugungskraft, selbst wenn man historische Populationen mit gleichen oder größeren Kennwerten vorweisen könnte. Gewissermaßen erfüllt das also nur eine **notwendige** Bedingung, um diese Entschlüsselung überhaupt als zulässig zu bewerten.

Können aber weitere, vom Bibeltext vorgegebene Verhältnis- oder absolute Zahlen als sekundäre Vorgaben reproduziert werden, dann steigt die Überzeugungskraft, weil sie die Zahl der gemachten Annahmen über die Anpassungsparameter, die "Freiheitsgrade", reduzieren. Das tun sie allerdings nur, wenn in den sekundären Vorgaben nicht weitere, neue Ad-hoc Annahmen direkt oder indirekt enthalten sind.

I. <u>Sekundäre Vorgabe für „DieZwölf“</u>

Ein solcher zusätzlicher Vorgabewert, Vorgabe-2, ist die Zahl der durch Leviten auszulösenden, zum Zeitpunkt des ersten Zensus lebenden männlichen Erstgeborenen der übrigen Stämme, $\mathbf{E_L}$, die in Numeri 3:43 in der konventionellen ‘Übersetzung‘ auf den Mann genau als 22‘273 angegeben ist. In der hier vorgeschlagenen revidierten Übertragung wird **vom Autor in Abschnitt 6.1ff** die alttestamentliche Angabe als $\mathbf{E_L = 10'273}$ ‘entschlüsselt‘. Diese Zahl enthält nicht mehr die Zahl der Erstgeborenen, die nicht als makellos einzustufen waren. Ihr Bruchteil, $\boldsymbol{\mu}$, wird vom Autor mit 2.91 % angegeben und übernommen, sodass zum Zeitpunkt des ersten Zensus die Zahl aller männlichen Erstgeborenen als $\mathbf{E} = \mathbf{E_L} \,/\, (1-\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{10'581}$ vorgegeben ist.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im folgenden $\mathbf{a_{max}}$ durch das synonyme Symbol Θ ersetzt. Die Gesamtzahl der Anfang 216 lebenden männlichen Erstgeborenen aller Altersklassen, ${}^{1,\Theta}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216}$, ist - mit $\mathbf{E}^{m}_{j}$ anstelle von $\mathbf{L_j}$ - analog der oben (Bestimmung der überlebenden Erstgeborenen) angegebenen Gleichung für ${}^{i,k}\mathbf{R_J}$ zu berechnen als:

$$\mathbf{{}^{1,\Theta}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216} = sum_j(\, E^{m}_{j} * S^{m}(216-j)\,)}_{\langle j\,=\,215-(\Theta-1)\,\ldots\,215\,=\,91\ldots215\rangle} \text{ (mit } \Theta = 125 \text{ Jahre)}$$

Bis zum Zeitpunkt des ersten Zensus ist auch unter diesen die gleiche Verlustrate, γ, anzusetzen, wie sie unter allen wehrfähigen Männern zu beobachten ist. Für die erstgeborenen Männer wird postuliert, dass die Verluste nur unter den Volljährigen auftraten. Diese Verluste müssen der Zahl **E** hinzugefügt werden, um den Sollwert für die Erfüllung der sekundären Vorgabe zur Zeit des Exodus zu bestimmen. In **Abschnitt 3.1.2.1 des Autors** wurden die Verluste geschätzt als 3‘950 aus 27‘500 Wehrfähigen, d.h. $\gamma = 3'950/27'500 = 0.1436$. Die Anzahl, der im Jahr 216 als voll verantwortliche Volljährige eingestuften erstgeborenen Männer ab der Altersklasse 20 ist:

$${}^{20,\Theta}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216} = {}^{1,\Theta}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216} - {}^{1,19}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216} \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{{}^{1,19}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216} = sum_j(\, E^{m}_{j} * S(216-j)\,)}_{\langle j=197\ldots215\rangle}$$

Damit die Vorgabe-2 für „DieZwölf“ erfüllt ist muss somit ${}^{1,\Theta}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216}$ die Bedingung erfüllen:

<u>Vorgabe-2 für „DieZwölf“</u>

$${}^{1,\Theta}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216} = \gamma * {}^{20,\Theta}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216} + \mathbf{E_L} \,/\, (1-\boldsymbol{\mu})$$

d.h.

$${}^{1,\Theta}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216} - \gamma * {}^{20,\Theta}\boldsymbol{\exists}^{m}_{216} = \mathbf{10'581}$$

II. <u>Sekundäre Vorgabe für Levi</u>

Eine sekundäre Vorgabe (Vorgabe-2) für die Population der Leviten ermittelt der **Autor in Abschnitt 7.1.4**. Die Zahl der zum Dienst im Tabernakel Berufenen wird mit **2‘580 Männern** im Alter von **30 bis 50** Jahren vorgegeben, d.h., für Levi muss die Gleichung erfüllt sein:

<u>Vorgabe-2 für Levi</u>

$$\mathbf{{}^{30,50}P^{m}_{216} = 2'580}$$

III. Umsetzung der sekundären Vorgaben

Zur Erfüllung dieser sekundären Vorgaben wird versucht, für jede der Sterbetafeln einen Verlauf der Fekundität zu konstruieren, d.h. die den Verlauf der Kurven **N(T)** und **K(t)** in Abb. **AF-5** bestimmenden Werte für $\mathbf{a_N}$, $\mathbf{s_E}$, $\mathbf{s_K}$ so zu ermitteln, dass im Exodus-Jahr die obigen Vorgabe-2 Zahlen reproduziert. Abbildung **AF-16a** zeigt für die Sterbetafeln SW1860, Künzler und DE2016/18 Beispiele für die Verläufe der Heiratsquoten **N(T)** und der relativen Geburtenraten **K(t)**, mit denen das für die Populationen „DieZwölf" und Levi möglich ist. Für die Heiratsquoten wurde – wenn möglich – immer der gleiche Verlauf für **N(t)** gewählt, wie er durch die Wahl $\mathbf{a_N}$ und $\mathbf{s_E}$ festgelegt wird. Für diese konstante Wahl von **N(T)** wurde dann nur noch der Verlauf der Geburtenrate **K(t),** d.h. der Wert von $\mathbf{s_K}$ so angepasst, dass ${}^{1,\Theta}\mathbf{\exists}^{m}{}_{\mathbf{216}}$ die vorangehende Gleichung erfüllt.

Hiermit sind alle Methoden und Voraussetzungen beschrieben, die in die folgenden Ergebnisse eingehen.

D. Ergebnisse

Vorbemerkung-2:

Für eine ursprüngliche Modellierung hatte der Autor die Verlustrate γ mit einem höheren Wert geschätzt, nämlich als 5'450 aus 29'000 Wehrfähigen, d.h. γ = 5'450/29'000 = 0.1879, d.h. 18.8 % anstelle des inzwischen von ihm als plausibler angesehenen, geringeren Wertes von 14.4 %. Anstatt die insofern überholten Ergebnisse zu verwerfen, können sie im Sinne der obigen Vorbemerkung-1 dazu genutzt werden, den Einfluss dieser Variabilität auf das Endergebnis als einer weiteren Randbedingung zu schätzen. Die **Tabellen 3** und **4** enthalten die für den plausibleren, geringeren Wert modellierten Ergebnisse. Die Abbildungen **AF-16** bis **AF-29** (außer **AF-26**) zeigen überwiegend die Ergebnisse für den ursprünglichen Wert von γ = 18.8% – wie auch ausdrücklich am Ende der Legende vermerkt wird. Legenden für mit dem neueren Wert erzeugte Abbildungen zeigen den revidierten Wert von γ = 14.4%. Die Abbildungen werden ausschließlich qualitativ interpretiert, u. a. auch zur Identifizierung unplausibler resultierender Altersverteilungen. Der erforderliche Aufwand, sie händisch aus den vom Programm erzeugten individuellen PDF-Fassungen zu integrieren in die Komposition dieser Abbildungen, wurde unterlassen, weil die Verläufe sich qualitativ nicht unterscheiden.

- ✖ -

1. Modellierungsergebnisse im Überblick

Ergebnisse werden nur für den als „natürlicher" erscheinenden Verlauf der Fekunditätsanpassung gemäß **Abbildung AF-5b** präsentiert, nachdem sichergestellt werden konnte, dass auch mit den alternativen Verläufen wie in **Abbildung AF-5a** dargestellt, immer eine entsprechende Bevölkerungsentwicklung dargestellt werden kann.

Die **Tabellen 3** und **4** sowie die entsprechenden (aber auf der früheren Version des Autors beruhenden) **Abbildungen AF-17 bis 25** fassen summarisch die Ergebnisse der Modellierungsversuche zusammen. **Tabelle 2** beschreibt die Bedeutung der Abkürzungen in den Tabellenköpfen der **Tabellen 3** und **4**. In ihrer Spalte 3 verweist Tabelle **2** auf die mit Buchstaben a bis g bezeichneten Unterabbildungen in **Abb. AF-26,** welche die in den **Abbildungen AF-18, 20 bis 25** erkennbaren Spannweiten der Populationskenngrößen der Tabellen 3 und 4 zeigen sowie – nur für „DieZwölf" – ihre Variation bei der Vorgabe-1 von 29'000 auf 27'500 Wehrfähige zur Zeit des Exodus. In der letzten Spalte gibt **Tabelle 2** die Kennungen wieder, mit denen diese Kenngrößen in **Abb. AF-30** und **AF-31** gekennzeichnet sind.

In den **Tabellen 3** und **4** wie in den Abbildungen sind die Sterbetafeln von oben nach unten mit abnehmender frühkindlicher Sterblichkeit angeordnet. **Tabelle 3** gibt die Ergebnisse mit den empirischen Sterbetafeln wieder, **Tabelle 4** diejenigen, die mit Siler-Modell Sterbetafeln berechnet wurden. Letztere unterscheiden sich nur in der frühkindlichen Sterblichkeit in den ersten fünf Jahren. In beiden Tabellen zeigen jeweils die zwei mittleren, mit einem Balken in Spalte 1 hervorgehoben Zeilen die Ergebnisse für die **Sterbetafel des Autors**.

Den Zeilen mit den Modellierungsergebnissen folgen in **Tabellen 3** und **4** einige – die Zahlen aller jeweils aufgeführten Sterbetafeln zusammenfassende – Angaben wie Spannweiten, Mittelwerte mit Standardabweichungen und Variationskoeffizienten, jeweils getrennt für „DieZwölf" und für Levi. Besonders die letzten drei Angaben haben allerdings nicht die Bedeutung im üblichen statistischen Sinn. Diese Werte sind rein deskriptiv zu sehen. Für Ergebnisse von Modellrechnungen wie diese hier (oder wie z.B. auch für Klima-Szenarios) sind keine belastbaren Annahmen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Berechnungsergebnisse möglich. Damit sind statistische Prüfungen der Ergebnisse unsinnig. Streng genommen kann nur die Spannweite der Zahlen voraussetzungslos diskutiert werden. Diese werden unten anhand der **Tabelle 5** und der diese Tabellenwerte darstellenden Abb. **AF-26** beurteilt.

Die in den letzten Zeilen der **Tabellen 3** und (redundant in) **4** enthaltenen Zahlen sind diejenigen, welche der Autor mit seiner vereinfachten Modellierung ermittelte, sowie deren relative Abweichungen zu den mit <u>seiner</u> Sterbetabelle hier berechneten und in den markierten mittleren Zeilen gezeigten Werten.

Für die empirischen Sterbetafeln mit extrem großer bzw. kleiner frühkindlicher Sterblichkeit, SW1860 und DE2016/18, sowie für „Künzler" als einer 'mittleren' zeigt die **Abbildung AF-16a** beispielhaft den Verlauf der Heiratsquoten und der Kinderzahl pro Mutter, für die in **Tabelle 3** und **4** aufgeführten Zahlenwerte der Anpassungsparameter $\mathbf{a_V}$, $\mathbf{a_N}$, $\mathbf{s_E}$, $\mathbf{s_K}$. Mit diesen Anpassungsparametern konnten die sekundären Vorgaben für „DieZwölf" (linke Spalte) und für Levi (rechte Spalte) der **Abb. AF-16a** erfüllt werden. Wo immer möglich werden dieselben Werte für $\mathbf{a_V}$, $\mathbf{a_N}$, und $\mathbf{s_E}$ gewählt. Die Vorgaben-2 wurden dann nur durch Anpassung des Wertes für $\mathbf{s_K}$ erfüllt. **Abbildung AF-16b** zeigt für die zwei empirischen Sterbetafeln SW1860 und SW1895, wie nur für Levi (rechts) es möglich war, mit denselben Werten für $\mathbf{a_V}$, $\mathbf{a_N}$, und $\mathbf{s_E}$ beide Vorgaben zu erfüllen. Unverzichtbar für „DieZwölf" war es hier, auch das Heiratsalter herabzusetzen. Die oberen Kurven zeigen die für Levi und „DieZwölf" gleichen Sterberaten für SW1860 (siehe auch **Abb. AF-11)** sowie mit den grünen Kurven die unterschiedlichen Verteilungen der Geburten, $\mathbf{g_a^1}$, multipliziert mit 100, jedoch mit dem Heiratsalter $\mathbf{a_V}$ = 15 für „DieZwölf" und für Levi mit der Vorgabe $\mathbf{a_V}$ = 20.

Abbildung AF-17 präsentiert die Wachstumsdynamik für die Gesamtpopulation für dieselben empirischen Sterbetafeln, für die die **Abbildung AF-16a** die Anpassung der Fekundität wiedergibt, mit der die sekundären Vorgaben bei Exodus bzw. 1. Zensus zu erfüllen sind. Für diese drei Sterbetafeln zeigen die grün gestrichelte Kurven - aufgetragen gegen die rechte y-Achse - diese zeitliche Veränderung der realisierten Kinderzahlen pro Mutter ('Fekunditäts-' Rate). Für SW1860 muss diese im letzten Jahr für „DieZwölf" auf Null sinken, um die Vorgabe-2 erfüllen zu können. Die gelben Kurven geben den Verlauf der jährlichen Geburtenzahlen, $\mathbf{L_j}$, die dunkelgrünen den Verlauf der jährlichen Sterbezahlen, $\mathbf{T_j}$, wieder. Die violetten Kurven beschreiben den jährlichen Zuwachs, $\mathbf{Z_j}$.

Die Graphiken in **Abbildung AF-18** zeigen die bis in die Jahre 195 und 215 akkumulierten Sterbefälle (= „Tode") sowie mit „Geburten" die akkumulierte Zahl der Geburten für „DieZwölf" (oben) und für Levi (unten). Die daraus resultierenden Gesamtpopulationen für „DieZwölf" und Levi zu Beginn der jeweiligen Folgejahren werden ebenfalls in Zuordnung zu den zugrundliegenden Sterbetabellen als „ALLE" angezeigt. Hier und in allen folgenden Abbildungen dieser Art werden in den linken Spalten die empirischen und in den rechten die Siler-Modell Sterbetafeln gegenübergestellt, wobei die des Autors beide Male in der Mitte erscheint.

Die zu den empirischen Sterbetabellen in **Abbildung AF-16a** gehörigen Alterspyramiden der Exodus-Population zeigt die **Abbildung AF-19a** für „DieZwölf" (links) und für Levi (rechts). **Abbildung AF-19b** zeigt diese Alterspyramiden für die Sterbetafel des Autors sowie für alle Siler-Modell Sterbetafeln. Letztere unterscheiden sich nur in der frühkindlichen Sterblichkeit der ersten fünf Jahre, die in der rechten Spalte von **Abbildung AF-19b** für das erste Lebensjahr (**D_{0-1}**) sowie für das 2. bis 5. Lebensjahr (**D_{2-5}**) angegeben wird.

Die **Abbildung AF-19c** soll demonstrierten, dass selbst für eine Sterbetafel wie Schweden-1751 eine Erfüllung der Vorgaben für „DieZwölf" noch möglich ist, wenn man den Beginn der Vermehrung mit dem biologisch und vielerorts auch soziologisch akzeptablen 16. Lebensjahr ('Heiratsalter' 15) zuließe. Gemeinsam mit **Abb. AF-19d** dient das Ergebnis dieser Modellierung, eine untere Grenze für die Größe der Exodus-Population zu schätzen, die mit den Vorgaben vereinbar ist.

Die Einträge der restlichen Spalten der **Tabellen 3** und **4** - außer den Zahlen für die Erstgeborenen - werden in den folgenden **Abbildungen AF-20** bis **AF-25b** in der gleichen Anordnung wiedergegeben wie in **Abbildung AF-18**, d.h. Zahlen links für die rein empirischen Sterbetafeln, rechts diejenigen für die Siler-Modell Sterbetafeln.

Der Vergleich der Abbildungen **AF-22a** und **AF-22b** belegt beispielhaft die obige Vorbemerkung-2, dass ungeachtet deutlich unterschiedlicher absoluter Zahlen für „DieZwölf" qualitative Schlüsse aus den Abbildungen unberührt bleiben von der Änderung der Vorgabe-1 für „DieZwölf" von 29'000 auf 27'500.

In **Abb. AF-23** variiert die Zahl der wehrfähigen Männer (zwischen 20 und 75 Jahren) für „DieZwölf" nicht, weil dieser Wert als Vorgabe-1 für jede Sterbetafel durch Anpassung des zeitlichen Verlaufs der Fekunditätsrate zu reproduzieren war. Entsprechend schwach variiert auch die Zahl der 30 bis 50 jährigen Männer.

Anhand der **Abbildungen AF-19** und **AF-27**, jeweils **a und b**, wird unten der Ausschluss der Sterbetafeln SW1860, SW1895 und SilerF4 begründet für eine weitergehende quantitative Analyse der Ergebnisse, ungeachtet der Tatsache, dass die vorgegebenen Werte auch mit ihnen reproduziert werden konnten.

In **Abbildung AF-28** wird beispielhaft die durch stückweise konstante mittlere Wachstumsraten modellierte Entwicklung des Autors verglichen mit der hier durchgeführten Modellierung. Es ist offensichtlich, dass erst in den letzten Jahrzehnten der Verlauf der beiden Entwicklungen gut übereinstimmt (man beachte die logarithmische Skala der y-Achse).

Abbildung AF-29 zeigt detaillierter als die Alterspyramiden in **Abb. AF-19**, dass bei Levi deutlich geringfügiger als bei „DieZwölf" die Altersverteilungen durch die unterschiedlichen Sterberaten beeinflusst werden durch den Zwang zur Erfüllung der Vorgabe-2. Dies auch und gerade in den letzten Jahren.

Abbildung AF-30 zeigt das Ausmaß, in dem die Populationskenngrößen aus **Tabellen 3 und 4** mit den Sterberaten - und bei „DieZwölf" zusätzlich mit der Vorgabe-1 - variieren.

Abbildung AF-31 zeigt mit **Tabelle 6** näherungsweise, in welchem quantitativen Ausmaß die Populationskenngrößen für „DieZwölf" durch relative Veränderungen der Vorgabe-1 wiederum relativ beeinflusst werden.

Abbildung AF-32 präsentiert Werte, die die Population Division der Vereinten Nationen für die mittlere Zahl der Kinder pro Frau (nicht pro Mutter) (rechts) sowie (links) für die mittlere Wachstumsrate der Jahre 2013 bis 2022 in den einzelnen Ländern ermittelt bzw. schätzt. Aufgetragen sind die Werte für die Länder, für die gleichzeitig der aktuelle Wert für den Human Development Index (HDI-2021) in einer separaten Datei verfügbar war. Der „HDI“ Index ist eine Maßzahl zwischen 0 und 1, mit der versucht wird, das Niveau des zivilisatorischen Entwicklungsstandes zu erfassen, auf dem die jeweilige Bevölkerung lebt. Die gestrichenen Trendgeraden werden zu rein deskriptiven Zwecken angezeigt. Die Werte für die Kinder pro Frau stammen aus Kompilationen ca. der letzten 50 Jahre, wobei die eingefügte kleine Graphik rechts die Häufigkeitsverteilung dieser Referenzjahre anzeigt. Demzufolge handelt es sich um Werte, die ganz überwiegend repräsentativ für das vergangene Jahrzehnt - also aktuell - sind. Die Werte für „DieZwölf“ und für Levi sind in den hier für sie gebrauchten Farben und Symbolen am unteren Bereichsende des Human Development Index hinzugefügt.

2. Exodus-Population, Kinder pro Mutter, Wachstumsraten

Die Größe der Gesamtpopulation beim Exodus sowie ihre Aufteilung auf Levi und „DieZwölf“ liegt nach **Tabelle 5** in den nachstehend gezeigten Bereichen. Wenn hier und im Folgenden nicht angemessen gerundete Zahlen sondern alle Ziffern der in Tabelle 5 gezeigten Werte angegeben werden, dann geschieht das, um ihre Auffindung dort zu erleichtern ungeachtet der Tatsache, dass bestenfalls die vollen Tausender Sinn machen. Die hier eingetragenen ‘Mittelwerte‘ <M> sind nicht die üblichen arithmetischen Mittel. Sie wurden bestimmt aus Spannweite und Median nach der in /23/ als ‘optimal‘ nachgewiesen Methode für kleine Stichproben aus unbekannter Verteilung. Sie werden benötigt für die Schätzung der Sensitivität der Ergebnisse gegenüber Variation des Werts für die Vorgabe-1 bei „DieZwölf“, der ja nicht unmittelbar aus dem biblischen Text festgelegt ist. Es sei wiederholt, dass alle statistischen Maße rein deskriptiv verwendet werden.

<u>Tabelle i: Größe der Exodus Gesamtpopulation</u>

Vorgabe-1 für „DieZwölf“	27'500 γ =14.4%			29'000 γ =18.8%		
Extrema, ‘Mittelwert‘	**min**	**<M>**	**max**	**min**	**<M>**	**max**
Levi	20'263	20‘313	20'356	20'263	20‘313	20'356
„DieZwölf“	83'899	92‘469	97'970	91'607	100‘753	106'457
Gesamt	**104‘162**	**112‘782**	**118‘326**	**111‘870**	**121‘089**	**126‘813**
Anteil Levi	*0.195*	*0.180*	*0.172*	*0.181*	*0.168*	*0.161*

Die für die Modellierung wichtigste Kenngröße, die über den ganzen Aufenthalt ‘<u>gemittelte</u>‘ Zahl der Kinder-pro-Mutter**, <KpM>**, sollte für Levi zwischen 5.45 und 6.13 liegen und mit der revidierten Verlustrate für „DieZwölf“ (γ = 14.4 %) zwischen 4.81 und 4.91, (Tabelle ii und **Abb. AF-20**). Beispielhaft zeigt **Abb. AF-20** in Abhängigkeit von der Sterbetafel auch die Kinderzahl pro Mutter

<u>Tabelle ii: Mittlere Zahl Kinder pro Mutter, **<KpM>**</u>

Vorgabe-1 für „DieZwölf“	27'500 γ =14.4%			29'000 γ =18.8%		
Extrema, ‘Mittelwert‘	**min**	**<M>**	**max**	**min**	**<M>**	**max**
Levi	5.45	5.68	6.13	-	-	-
„DieZwölf“	4.81	4.85	4.91	4.97	5.01	5.06

für das erste (**KpM_1**) und letzte Jahr (**KpM_{215}**) des Aufenthalts neben dem Mittelwert für die gesamte Entwicklungsdauer (**<KpM>**). Diese vom Autor postulierte zeitliche Variation der Kinderzahl pro Mutter, die erst eine erfolgreiche Anpassung an beide Vorgaben ermöglicht, ergibt Werte für die Kinderzahl pro Mutter im 1. Jahr, **KpM_1**, zwischen 6.56 und 8.57 für „DieZwölf“ und für Levi deutlich höhere Werte zwischen 8.33 und 9.44. Im letzten Jahr ist die Kinderzahl pro Mutter abgesunken auf **KpM_{215}** zwischen 1.35 und 3.24 für „DieZwölf“ bzw. auf 2.62 bis 2.92 für (**Tabelle 5**).

Die aus dem Verlauf der Fekunditätsraten resultierenden, über die gesamte Zeit in Ägypten gemittelten Wachstumsraten **<R>** schwanken für Levi um 0.1% zwischen 3.7124% und 3.7146% pro Jahr und sind somit unabhängig von den durchaus um relativ 11.8% variierenden Werten für **<KpM>** (**Tabelle 5**, Δ^L). Umgekehrt schwanken die Wachstumsraten **<R>** für „DieZwölf“ mit 2.4% zwischen 3.0624% und 3.1364% pro Jahr wesentlich stärker als für Levi, bei deutlich geringerer Schwankungsbreite von 2.1% für **<KpM>** (**Tabelle 5**, Δ^{12}_B).

Tabelle iii: Mittlere Wachstumsrate in Ägypten, **<R>** in %

Vorgabe-1 für „DieZwölf“	27‘500 γ =14.4%			29'000 γ =18.8%		
Extrema, ‘Mittelwert‘	**min**	**<M>**	**max**	**min**	**<M>**	**max**
Levi	3.7124	3.7136	3.7146	-	-	-
„DieZwölf“	3.0624	3.1082	3.1364	3.1045	3.1494	3.1766

3. Vertrauensbereiche

Mit der Beschränkung der Sterblichkeit auf den Bereich der durch die acht ‘zulässigen‘ Sterbetafeln überdeckten Bereich - SW1930, SW1950, Künzler, SW1985, DE2016/18, DE-SilerF1, DE-SilerF2, DE-SilerF3 (unter Ausschluss von SW1860, SW1895 und SilerF4; siehe dazu **E.**2. Zulässige Sterbetafeln) – kann man versuchen, die durch sie gegebene Unsicherheit der Ergebnisse dieser Modellierung zu schätzen. Für jede der Ergebnisspalten in **Tabellen 3** und **4** wird das gemeinsame Minimum sowie das Maximum eines Wertes unter diesen acht verbleibenden Sterbetafeln gesucht. **Tabelle 5** enthält diese Minima und Maxima für Levi und - für „DieZwölf“ - sowohl für den ursprünglichen Ansatz als auch für den revidierten Ansatz für die Verlustrate γ . Die Einträge in Tabelle 5 sind automatisch aus der zugrundeliegenden Excel Tabelle übernommen worden, ohne sie händisch auf die jeweils sinnvollen Ziffern zu runden. Soweit die uns unbekannte Sterblichkeit von den als zulässig bewerteten Sterbetafeln überdeckt wird, also z.B. in den **Abbildungen AF-11** zwischen der gelben Kurve für Schweden-1930 und der grünen Kurve für DE2016-218 verläuft, sollte der uns unbekannte Wert für eine Kenngröße zwischen den in **Tabelle 5** angegebenen Minimal- und Maximalwerten liegen.

Für „DieZwölf“ stehen in **Tabelle 5** unter der Spaltenüberschrift „Vorgabe-1A“ die Minima und Maxima der Kennzahlen, die mit dem ursprünglichen Wert für Vorgabe-1 (29‘000 Wehrfähige z. Zt. des Exodus) berechnet werden. Die mit Δ^{12} gekennzeichneten Spalten geben den Bruchteil der Spannweiten (**max** - **min**) relativ zu dem Mittelwert (**max** + **min**)/2 wieder, und zwar als Prozentwert. Für die Spalte „A&B“ bei Δ^{12} sind das die Extrema aller vier vorherstehenden Spalten. Das heißt, dieser Wert berücksichtigt auch die Variation der Vorgabe-1 für „DieZwölf“. Die Spalte „B“ bei Δ^{12} zeigt nur die Variabilität, die durch die unterschiedlichen Sterbetafeln entsteht, d.h. sie berücksichtigt nur die zwei Spalten unter Vorgabe-1B. Für Levi gibt es die zusätzliche Quelle der Variabilität Δ^L durch γ nicht.

Die Unterabbildungen **AF-26, a - g** zeigen die absoluten Spannweiten der Populationskennzahlen in **Tabelle 5**, die durch die Variation der 'zugelassenen' Sterbetafeln entstehen. Sie zeigen für „DieZwölf" Rechtecke, deren oberer Rand den Wert in den Spalten **max** und deren unterer Rand den Wert in den Spalten **min** angibt, für „DieZwölf" jeweils getrennt nach Vorgabe-1A (offene Rechtecke) und Vorgabe-1B (geschlossene Rechtecke).

Einen 'synoptischen' Überblick über die Größe der prozentualen Variationsbreiten in den Spalten Δ^{12}_{AB}, Δ^{12}_{B} und Δ^{L} der **Tabelle 5 gibt Abbildung AF-30.** Der Unterschied in der Höhe innerhalb der Paare blauer Balken für „DieZwölf" reflektiert den separaten Einfluss der Wahl der Verlustrate und der Auswahl der Sterbetafeln. Bei der Zahl der Lebendgeburten bei Moses Geburt (L135) z.B. zeigt die gleiche Höhe der offenen und geschlossenen blauen Balken, dass diese Variation der Verlustrate noch keinen 'messbaren' Einfluss hat im Vergleich zu der 36%gen relativen Variation allein durch die Sterbetafeln. Umgekehrt resultiert die relative Variation von 5.3% der Zahl der waffenfähigen Männer (M216_20..75) für „DieZwölf" ausschließlich aus der Variation der Verlustrate, da ja für jede Sterbetafel die Vorgabe-1 für „DieZwölf" (29'000 bzw. 27'500) durch eine passend bestimmte mittlere Zahl von **<KpM>** mit Hilfe des Werts für $\mathbf{s_K}$ zu erfüllen war. Mit Abstand am empfindlichsten reagiert die Zahl der unter 20-jährigen auf die unterschiedlichen Sterberaten (M216_1..20 und M216_1..20p).

4. Sensitivitätsanalyse

Zur Bestimmung der Zahl der waffenfähigen Männer für „DieZwölf" zur Zeit des Exodus anhand der späteren Angaben zum 1. Zensus von 23'550 schätzt der Autor ursprünglich einen Verlust von 5'450 Männern, verursacht durch die Kämpfe mit den Amalekitern und durch das Gericht über die Anbeter des Goldenen Kalbs. Bezogen auf die dann 29'000 Wehrfähigen zur Zeit des Exodus bedeutet dies eine Verlustrate von 18.8%, was merklich über einer als „Dezimierung" geläufigen, hohen Verlustrate von 10% liegt. In einer revidierten Schätzung reduziert er diese Verluste um 1'500 auf 3'950 Wehrfähige, was nunmehr 27'500 Wehrfähige zur Zeit des Exodus ergibt mit einer Verlustrate von 14.4%. Diese zusätzliche Unsicherheit der Modellierungsergebnisse, zusätzlich zu der Unsicherheit aufgrund der unbekannten Sterberaten ergibt für „DieZwölf" eine gesamte Variationsbreite in **Tabelle 5** von Δ^{12}_{AB}=23.8% für die Größe der Exodus-Population gegenüber einer Variationsbreite von Δ^{12}_{B}=15.4% für die nur mit den Sterberaten verknüpfte Unsicherheit. Mit den für beide Verlustraten vorhandenen Modellierungsergebnissen ist es jetzt aber möglich, die Auswirkung einer erneuten Variation der Vorgabe-1 für „DieZwölf" um etwa einen Bruchteil $\mathbf{p} = d\mathbf{W}/\mathbf{W_0}$ um den (vermutlich) 'besten' Wert von $\mathbf{W_0}$=27'500 Wehrfähigen näherungsweise zu bestimmen, ohne den Aufwand für die gesamte Modellierung erneut treiben zu müssen. Der Wert von $\mathbf{x_G}$ in der letzten Spalte von **Tabelle 6** gibt das Vielfache von **p** an, um das sich eine Größe **G** um dG dadurch prozentual ändert; $d\mathbf{G} = \mathbf{x_G} * \mathbf{p} * \mathbf{G}$. Kenngrößen mit negativem Faktor $\mathbf{x_G}$ kennzeichnen Größen, die sich bei Erhöhung von $\mathbf{W_0}$ erniedrigen (siehe Legende zu **Abbildung AF-31)**. Kenngrößen, die in **Abb. AF-31** in dem schraffierten Bereich zwischen -1 und +1 liegen, reagieren unterproportional, die die außerhalb liegen, reagieren überproportional auf Veränderungen der Vorgabe-1 für „DieZwölf". Insbesondere die Zahl der unter 20-jährigen Männer reagiert mit einer mehr als 3-mal stärkeren relativen Erhöhung oder Erniedrigung als die entsprechende relative Veränderung des Werts für die Vorgabe-1.

E. Diskussion

1. Summa

Über die notwendige Bedingung für die Richtigkeit der Entschlüsselung des Autors hinaus können auch die unabhängigen sekundären Bedingungen (Vorgabe-2) durch die Modellierung erfüllt werden, indem der Verlauf der Fekundität (= realisierter Fertilität) passend gewählt wird. Dies kann mit bevölkerungsdynamischen Annahmen gezeigt werden, die historisch in anderen Populationen realisiert sind – abgesehen von der maximalen Lebensspanne Ω. . Für die Erfüllung der sekundären Vorgaben existiert jetzt nur genau ein Wert für die Anpassung der Kinderzahl, $\mathbf{s_K}$, der gleichzeitig die primären und die sekundären Vorgaben erfüllt – nachdem man die Parameter für die Reduktion der Heiratsquote ($\mathbf{a_N}$, $\mathbf{s_E}$) und das Vermählungsalter, $\mathbf{a_V}$, sowie die analytische Form für die Fertilitätsanpassung nach **Abb. 5** für alle Sterbetafeln gemeinsam festgelegt hat. Für die primären Vorgaben allein existieren demgegenüber beliebig viele ‘erfolgreiche‘ Parameterkombinationen.

Grundsätzlich besteht sowohl für die „DieZwölf“ wie auch für Levi der Zwang, steigende Sterblichkeit durch höhere Kinderzahl auszugleichen, um die primären Vorgaben zu erfüllen. Der in **Abb. AF-18** sichtbare Trend zeigt diesen trivialen Zusammenhang in quantitativer Weise (die Sterblichkeit steigt in allen diesen Abbildungen von rechts nach links gelesen). Der Unterschied zwischen den sekundären Vorgaben der beiden Populationen liegt darin, dass die notwendige Anpassung der Kinder-pro-Mutter bei Levi an der Altersverteilung – cum grano salis – nichts ändert (**Abb. AF-19a** und **b**), da der relative Anteil der Ziel-Altersklasse – 30 bis 50 jährige Männer – an der Gesamtpopulation konstant = 25 % bleibt (Levi in **Abb. AF-24** links und rechts und **AF-29** rechts).

Für die Zielpopulation „DieZwölf“ mit der sekundären Vorgabe-2 für die Erstgeborenen gilt das nicht („DieZwölf“ in **Abb. AF-24** und **AF-29** links). Der relative Anteil erstgeborener Kinder (weiblich oder männlich) ist Eins ab einer Kinderzahl pro Mutter von **KpM** ≤ 1. Bei der durch steigende Sterblichkeit erforderlichen Zunahme von **KpM** muss der relative Anteil der Erstgeborenen entsprechend sinken. Die Erfordernis höherer Kinderzahlen pro Mutter und die entgegengesetzte Forderung nach geringeren Kinderzahlen pro Mutter kann nur über eine geeignete Aufteilung der Kinderzahl pro Mutter über die Zeitachse erfüllt werden – wenn überhaupt. Um die geforderten absoluten Zahlen zu erreichen, muss der relative Anteil der Erstgeborenen besonders in den späteren Jahren mit dem höchsten Zuwachs durch eine entsprechende Absenkung der Kinderzahl pro Mutter mehr oder weniger stark hoch gehalten werden.

2. Zulässige Sterbetafeln.

Im Folgenden wird begründet, dass die Sterberaten in den empirischen Sterbetafeln SW1860, SW1895 für die quantitativen Analyse ausgeschlossen werden, weil für sie die Vorgaben für „DieZwölf“ nur unter Verletzung der weiteren Randbedingungen des Autors erfüllt werden können. Die Siler-Modell Sterbetafel DE-SilerF4 wird ebenfalls ausgelassen, weil auch für sie die Altersverteilung der Exodus-Populationen für „DieZwölf“ und für Levi sich zu stark unterscheiden.

Für die empirischen Sterbetafeln mit der größten frühkindlichen Sterblichkeit (SW1860 und SW1895) konnte mit einem Heiratsalter $\mathbf{a_V}$ = 20 kein Wert für die Anpassung von **K(t)** (d.h. der Geburtenrate) gefunden werden, mit dem für „DieZwölf“ die sekundäre Vorgabe-2 zu erfüllen war. Erst wenn das Heiratsalter auf 19 und 17 (für γ = 18.8 %) bzw. sogar auf 18 und 16 Jahre (für γ = 14.4 %) herabgesetzt wird, gelingt dies überhaupt. Die Zeilen Nr. 1 und Nr. 3 in **Tabelle 3** zeigen für γ = 14.4 % die Ergebnisse, für die $\mathbf{a_V}$ auf höchstens 18 und 16 Jahre herabgesetzt werden musste, um die Zwangsbedingung in **C.2.I** für „DieZwölf“ erfüllen zu können. Ebenso musste die Heiratsquote für beide Populationen auf ihrem Maximalwert 0.98 belassen werden. Im Gegensatz dazu kann auch mit den Siler-Modell-Sterbetafeln (**Tabelle 4**) mit den hohen Kindersterblichkeiten die sekundäre Vorgabe für „DieZwölf" mit den ansonsten einheitlichen Annahmen für den Verlauf der Fekundität erfüllt werden. Das 'Versagen' der Modellierung bei den rein empirischen Sterbetafeln ist somit nicht Folge nur der hohen frühkindlichen Sterberaten.

Ohne stichhaltige Gründe für das Gegenteil kann des Weiteren unterstellt werden, dass das Proliferationsverhalten während des Ägyptenaufenthaltes – und damit die Alterspyramiden beim Exodus (**Abb. AF-19a** und **AF-19b**) – sich bei Levi nicht signifikant unterscheiden von denjenigen der „DieZwölf". Dieses Postulat würde Sterberaten, wie sie in den Sterbetafeln SW1860, SW1895 und wohl auch in DE-SilerF4 enthalten sind, aus dem Bereich des für die Bevölkerungsentwicklung Akzeptablen ausschließen – oder wenigstens unwahrscheinlich machen, selbst wenn man bei SW1860 und SW1895 die Verletzung des frühesten Heiratsalters von $\mathbf{a_V}$ = 20 Jahren akzeptieren wollte (Siehe **Abb. AF-16b** und **Abb. AF-19a** und **b**). Wenn man mit dem Autor ein Heiratsalter von frühestens 20 Jahren als zwingend ansieht, dann heißt das, dass Sterberaten der durch SW1860 durch SW1895 repräsentierten Lebensbedingungen eine Bevölkerungsentwicklung ausschließen, die von der Gründerpopulation zu der durch die Vorgaben postulierten Exodus-Population für „DieZwölf" führt. Für beide Sterbetafeln ist es des weiteren nicht möglich, die Vorgaben zu erfüllen, sobald man – wie vom Autor postuliert – die Heiratsquote gegen Ende der 215 Jahre von ihrem Maximalwert 98% absenkt.

Im Gegensatz dazu können für Levi, dessen sekundäre Vorgabe eine andere Teilpopulation betrifft, für alle Sterbetafeln die Vorgaben zwar mit einheitlichem Verlauf der Heiratsraten und der Heiratsalter erfüllt werden. Gegen eine Bevölkerungsentwicklung mit der durch SW1860 durch SW1895 beschriebenen Sterblichkeit spricht aber bei Levi wie bei „DieZwölf", dass die Zahl von 10 bis 11,5 Kindern pro Mutter (**Abb. AF-20**) in den Anfangsjahren sich einer als plausibel erscheinenden Obergrenze nähert – auch wenn dies nur für eine beschränkte Dauer vorherrschte (siehe auch **Abb. AF-32**). (Es sei aber erinnert an die oben erwähnte 'putzmuntere' Mutter von 16 Kindern). Umgekehrt muss die Kinderzahl pro Mutter in den letzten Jahren ($\mathbf{KpM_{215}}$) drastisch abgesenkt werden. Für „DieZwölf" erfolgt das so stark, dass die aus der Kinderzahl pro Mutter sich ergebende mittlere Wachstumsrate mit den genannten Sterbetafeln in den letzten 6 bzw. 8 Jahren negativ wird (**Abb. AF-27a**), d.h., dass die Gesamtpopulation wieder abnimmt (**Abb. AF-27b**).

Somit werden nur Ergebnisse für die Sterbetafeln SW1930, SW1950, Künzler, SW1985, DE2016/18, DE-SilerF3, DE-SilerF2 und DE-SilerF1 ausführlicher diskutiert.

3. Mindestgröße für „DieZwölf" anhand der Sterbetafel Schweden-1751

Wesentlich steiler noch als bei den ausgeschlossenen Sterbetafeln verläuft die frühkindliche Sterblichkeit für die deswegen erst recht auszuschließende Sterbetafel Schweden-1751 (siehe **Abb. AF-11**). Sie kann jedoch ausgenützt werden, um eine Mindestgröße der Exodus-Population für „DieZwölf" zu schätzen. Für Levi gilt das nicht, da die Altersverteilungen (**Abb. AF-19 a** und **b**) nur wenig und die mittleren Wachstumsraten so gut wie gar nicht durch die Sterberaten beeinflusst werden (siehe R_1..216 für Levi in **Abb. AF-30**).

Das zweite Lebensjahr erreichen mit dieser Sterbetafel nur 79.2%; das dritte nur 75.2%, das vierte nur 70.6% und das fünfte Lebensjahr nur 68.8% der männlichen Lebendgeborenen. Das 'Vorgabe-' Heiratsalter $\mathbf{a_V}$ = 20 Jahre erreichen nur noch 61.6% der männlichen und 64.7 % der weiblichen Lebendgeborenen. Selbst für diese Sterberaten lässt sich aber mit einem Heiratsalter $\mathbf{a_V}$ = 15 Jahre bei vorgabegerechter Absenkung der Heiratsrate die in **Abb. AF-19c** gezeigte Altersverteilung der Exodus-Population ausbilden. Was auf den ersten Blick an die pathologischen Altersverteilungen mancher überalterter '1.-Welt' Gesellschaften erinnern könnte, das stellt genaugenommen eine optimale Altersverteilung dar für eine Population, die die Herausforderungen zu bestehen hat, denen die Exodus-Population entgegengeht. Rund drei Viertel (76.4%) der Population ist im ‘wehrfähigen‘ Alter. Sie trägt die Hauptlast für 13.6% der unter 20-Jährigen und 10.0% der über 75-Jährigen. Mit dem Anteil von 50.1% im ‘Reproduktions-‘ Alter zwischen 15 und 51 Jahren ist es ein Leichtes, das Defizit an Jüngeren wieder aufzufüllen sobald die äußern Zwänge entfallen, die dieses Defizit hervorriefen.

Wie aber **Abb. AF-19d** oben zeigt, ist eine Entwicklung, die die Vorgaben -1 und -2 für „DieZwölf“ erfüllt, nur erreichbar mit definitiv grenzwertigen Annahmen über die Kinderzahl pro Mutter in den ersten ca. 80 ‘goldenen‘ Jahren, die durch Josephs direkte und nach seinem Tod sicher noch einige Zeit nachwirkende Begünstigung möglich gewesen sein mag. Erst ab dem Jahr 83 sinkt die jährliche Wachstumsrate (= jährlicher Zuwachs) unter 4%, um dann in den letzten 25 Jahren sogar zunehmend negativ zu werden (**Abb. AF-19d** unten).

Das zu dieser Sterbetafel gehörige Ergebnis von **73‘000** für die Größe der „DieZwölf“ Exodus-Population dürfte daher ein nicht mehr unterschreitbares Minimum für eine Bevölkerungsentwicklung darstellen, die von der beschriebenen Gründerpopulation ausgehend mit der vom Autor präsentierten Entschlüsselung der in Num. 1:46 und Num. 3:43 gegebenen Zahlen kompatibel ist.

4. Allgemeine Diskussion

Die vordergründig interessanteste Größe, die Größe der Gesamtpopulation beim Exodus, variiert erheblich in Abhängigkeit von allen zugrunde gelegten Sterbetafeln (**Abb. AF-22**). Bei den empirischen Sterbetafeln (**Tabelle 3**, Spalte P_{216}) steigt die Population für „DieZwölf“ mit abnehmender Kinder- und Erwachsenensterblichkeit von **76‘915** auf **97‘907**. Das entspricht einer Spannweite (= Unsicherheit) von **20‘992** Personen. Mit den Siler-Modell Sterbetafeln, in denen nur die frühkindliche Sterblichkeit in den ersten fünf Jahren variiert (**Abb. AF-12**), verringert sich die Spannweite auf **13‘118** mit einem Anstieg von **83‘869** bis **96‘988** Personen beim Exodus (**Tabelle 4**, Spalte P_{216}).

Die Gesamtpopulation für Levi ist demgegenüber so gut wie unabhängig von dieser Variation der Sterblichkeit mit einem Wert zwischen 20‘263 und 20‘585 Personen. Der Grund ist, dass durch die primäre Vorgabe der Gesamtzahl der männlichen Leviten für alle Sterbetafeln die Gesamtpopulation nur noch aufgrund unterschiedlicher geschlechtsspezifischer Sterberaten variieren kann.

Die prozentualen Abweichungen der vom Autor mit einem vereinfachten Berechnungsverfahren gewonnen Zahlen von denen, die mit seiner Sterbetafel hier berechnet werden, zeigen die untersten Zeilen der **Tabelle 3** und (redundant) **4**. Diese Abweichungen sind überraschend gering, besonders für die Exodus-Population. Sowohl die etwas größeren relativen Abweichungen bei den Zahlen für das Jahr 196 als auch die dann erheblichen Abweichungen bei den Zahlen für das Geburtsjahr des Moses entstehen beide auf Grund dieser Vereinfachung in Verbindung mit dem unterschiedlich modellierten Verlauf der Kinderzahl pro Mutter während des Aufenthaltes.

Je größer der zeitliche Abstand vom Exodus, um so weniger kann eine Modellierung der Bevölkerungsentwicklung mit der einleitend erwähnten „Zinseszins“ Gleichung ($N_J=N_0*[1+R]^J$) mit einer einzigen ‘mittleren‘ Wachstumsrate R die dazwischen liegende Bevölkerungsentwicklung zutreffend beschreiben, solange nicht die dort genannte Voraussetzung erfüllt ist. Die Kurven für den Verlauf einer Bevölkerungsentwicklung, die dieser Gleichung folgte, würde in den **Abb. AF-17**, **AF-27b** und **AF-28** entlang von Geraden mit einer konstanten Steigung verlaufen, wobei die Steigung durchaus auch Null sein könnte für eine stationäre, nicht weiter wachsende Bevölkerung. In **Abb. AF-27a** verliefe die eine konstante Wachstumsrate repräsentierende Kurve für den jährlichen Zuwachs waagerecht. Näherungsweise erfüllt ist dies dort für Levi etwa zwischen den Jahren 105 bis 120 und 140 bis 150.

Für den für die Größe der Exodus-Population entscheidenden Verlauf der Entwicklung in den letzten Jahren hat der Autor der Notwendigkeit, die Fekundität anpassen zu müssen, Rechnung getragen, indem er Wachstumsraten gezielt anpasste und zwar absenkte, um den für „DieZwölf" notwendigen Anteil der männlichen Erstgeborenen darstellen zu können (siehe **E.1**, letzter Absatz). Die drei grauen waagerechten Linien auf der linken Seite von Abb. **AF-27a** zeigen die Werte, mit denen ihm das für „DieZwölf" gelang, nämlich R = 3.3268% für die Jahre 1 bis 135, für die Jahre 136 bis 195 (praktisch unverändert) R = 3.2348% und R = 2.0400% für die letzten 20 Jahre von 196 bis 215. Die schwarzen strich-punktierten Geraden in den Abb. **AF-27b** und **AF-28** geben den Verlauf einer Bevölkerungsentwicklung wieder, die dieser Näherung folgte. Offensichtlich ist in Abb. **AF-28**, die den Verlauf für „DieZwölf" mit der Sterbetafel des Autors zeigt, dass in den letzten Jahren die Übereinstimmung mit der detaillierten Vergleichsberechnung gut für die männliche Population (oben) und befriedigend für Gesamtpopulation (unten) ist.

Wie man die bei größeren Abständen vom Exodus zwangsweise zunehmenden Abweichungen beurteilt zwischen der Anpassung des Autors gemäß **Abb. AF-27a** und der hier analog zu den Verläufen in **Abb. AF-16a** oder auch **b** gewählten, hängt letzten Endes davon ab, welchen dieser Verläufe nach **Abb. AF-5, a** oder **b** man als einen der unbekannten Wirklichkeit näherkommenden Verlauf betrachtet.

Relevant könnte dies werden für die Beurteilung der Populationsgrößen und der Wehrfähigen zu Beginn der Unterdrückung im Jahr 125 oder der Geburtszahlen im Geburtsjahr des Moses. Hier liegen die Schätzungen erwartungsgemäß merklich bis erheblich auseinander (**Tabelle 3** oder **4**). In wieweit diese Unterschiede die Bewertung dieser Zahlen durch den Autor in seinem Abschnitt 7.1.1 und 7.1.3 berühren, ist nicht Gegenstand der Vergleichsberechnung.

5. Aktualistische Einordnung

Einer der jüngeren Schätzungen der Exodus-Population schätzt (ähnlich wie der Autor, allerdings mit nur einer postulierten, konstanten mittleren jährlichen Wachstumsrate von nur **2.6 %**) eine Gesamtpopulation von ca. **36'000** bis **42'000** Personen /1/ mit der Begründung, dass (i) höhere Wachstumsraten unter den damaligen Bedingungen nicht vorstellbar seien sowie (ii) unter der weiteren Forderung, dass der Anteil Levis an der Gesamtpopulation nahe seinem 'Erwartungswert' von 1/12 = 8.5 % liegen solle. Diese Erwartung wird eindeutig durch die Ergebnisse der hiesigen Modellierung verletzt (siehe **D.2. Tabelle i**). Sowohl für die ursprüngliche und erst recht für die revidierte Schätzung der Verlustrate liegt der Anteil Levis and der Gesamtpopulation rund doppelt so hoch wie dieser Erwartungswert. Wieweit die in der Thora erkennbare Sonderstellung Levis auch hierin zum Ausdruck kommt, kann hier nicht beurteilt werden.

Abbildung AF-32 zeigt aktuelle Daten zur Weltbevölkerung der Vereinten Nationen für mittlere jährliche Wachstumsraten und Kinderzahlen pro Frau. Die hier gebrauchten Zahlenwerte <KpM> für die Kinderzahlen pro Mutter sind den Kinderzahlen pro Frau gegenüber überhöht um den Anteil der kinderlosen Frauen. Aufgetragen sind diese Werte gegenüber den Werten des Human Development Index (HDI), mit dem im Entwicklungsprogramm der Vereinten Nationen versucht wird, das „zivilisatorische" Niveau zu quantifizieren, auf dem die Bevölkerung einer bestimmten Region zur Zeit, das heißt in 2021, lebt. Insbesondere auch das Niveau der hygienischen und medizinischen Entwicklung geht in die Bewertung des HDI insofern maßgeblich ein, als diese die Lebenserwartung einer Bevölkerung entscheidend beeinflussen. Letztere ist einer der maßgeblichen Faktoren für den HDI. Das obige Argument, dass die gemutmaßten schlechten Lebensbedingungen zur Zeit des Exodus höhere (mittlere) jährliche Wachstumsraten als die angenommenen 2.6% unwahrscheinlich erscheinen lässt, lässt sich durch diese Daten nicht erhärten. Der generelle Trend zeigt im Gegenteil mit abnehmendem Entwicklungsniveau eine Zunahme der Kinder pro Frau und damit eben auch eine Zunahme der mittleren jährlichen Wachstumsraten. Welchen Wert des HDI der israelischen Population in Ägypten nach den Kriterien der UN zuzurechnen wäre, darüber kann nur spekuliert werden. In **Abb. AF-32** wird das untere Ende der Skala mangels niedrigerer Werte als angemessen gewählt.

Die **Tabelle 7** zeigt aktuell sechs Länder, deren Wachstumsraten (fast) gleich und größer sind, als die Eintragungen in ihrem Mittelteil für Levi sowie neun Länder, deren Wachstumsraten größer sind, als für die „DieZwölf“. Die Eintragungen im Mittelteil für die frühkindliche Sterblichkeit zeigen, dass auch diese Werte mit den Wachstumsraten (und damit mit der benötigten Kinderzahl pro Mutter) kompatibel sind. (Für die Sterblichkeit ist hier der Mittelwert beider Geschlechter angegeben). Die vom Autor angesetzte frühkindliche Sterblichkeit wird in **Tabelle 7** allerdings nur noch von Bahrain und Oman unterboten und könnte von daher als ein wenig optimistisch bewertet werden.

Ein Vergleich mit heutigen sogenannten „Naturvölkern“, in denen heutige zivilisatorische - positive wie negative - Einflüsse auf die Bevölkerungsentwicklung gering und deren Lebensverhältnisse damit nicht besser als die damals in Ägypten sein dürften, zeigt folgendes. Die heute in Bolivien als „Wildbeuter“ von Jagd und Anbau lebende Urbevölkerung der Tsinamé übertrifft sowohl in der mittleren Wachstumsrate von **<R>=3.81** % pro Jahr als auch mit der Totalen Fekunditätsrate mit **TFR = 9.2** Kindern pro Frau das Wachstum der Leviten /19/. (Letztere ist bei Gurven, Davison, wie üblich, bezogen auf alle Frauen und damit kleiner als das hier gebrauchte KpM, das auf die verheirateten fruchtbaren Frauen beschränkt wird.) Unterschiede dieser Größe (3.81 vs. 3.71) führen nach 215 Jahren zu Abweichung von mehr als 20%, sind also nicht vernachlässigbar. Die in /1/ postulierte Obergrenze von **<R>=2.6 %** kann somit schwerlich mit empirischen Daten begründet werden.

F. Fazit

Insgesamt können die Ergebnisse der Modellierung durch den Autor als im Rahmen des heute Beobachtbaren als plausibel angesehen und damit akzeptiert werden. Dabei wird hier die Gültigkeit insbesondere der aus dem biblischen Bericht entschlüsselten Zahlen für die Gründerpopulation unterstellt.

- Die angesetzte Fruchtbarkeit liegt voll im Rahmen des heute Beobachtbaren, sowohl in „Naturvölkern“ wie auch in sogenannten Schwellenländern.

- Hinweise auf die neuzeitliche und dann moderne, vor allem europäische Entwicklung der Lebenserwartung und ihre Extrapolation in die Vergangenheit greifen nicht. Die positive neuzeitliche Entwicklung reflektiert die Fortschritte der Hygiene und der Medizin mit ihrer das Leben verlängernden Wirkung und nicht die intrinsische biologische Überlebensfähigkeit. Allein der Nachweis von Abwasserkanalisationen in städtischen Siedlungen der Eisenzeit in z.B. Tel Arad lässt die hygienischen Verhältnisse im Europa der industriellen Revolution und davor als eher rückschrittlich erscheinen. Der Befund über den Einfluss der sogenannten genetischen Entropie auf die biologische Überlebensfähigkeit erhöht im Gegenteil die Plausibilität dieser Annahme über die maximale Lebensspanne in dieser Zeit. Darüber hinaus beeinflusst die maximale Lebensdauer zwar die absoluten Bevölkerungszahlen am Ende der Entwicklung. Die Dynamik der Entwicklung selbst - und damit die Bewertung ihrer Plausibilität - wird jedoch bestimmt von der Balance zwischen der Sterblichkeit bis zum Ende des reproduktionsfähigen Alters und der Fekundität.

- Wer die Ergebnisse der Entschlüsselung des Autors mit bevölkerungsdynamischen Einwänden in Frage stellt, müsste dafür belastbare empirische Belege vorlegen für einen alternativen quantitativen Verlauf der Sterblichkeit in der damaligen Zeit, der außerhalb des Bereichs liegt, der von den hier verwendeten Sterbetafeln abgedeckt ist (Abb. **AF-12** und **AF-11**). Mit einer solchen alternativen Sterbetafel könnte die Modellierung der Bevölkerungsentwicklung entsprechend der hier angewandten Methode gegebenenfalls zu besser fundierten Zahlen bzw. zu geringerer Unsicherheit über die Größe der Exodus-Population gewonnen werden, besonders dann, wenn Vertrauensbereiche für die Sterbetafel auch Vertrauensbereiche für die Ergebnisse zu schätzen erlauben.

- Die Schätzung des Autors von rund **95‘500** Personen für die Exodus-Population für “Die-Zwölf“ bzw. inklusive Levi von insgesamt **116‘000** Personen für die gesamte Exodus-Population liegt am oberen Ende des „Vertrauensbereichs“ der hiesigen Modellierung, mit einer möglicherweise optimistischen Annahme über die anzuwendenden Sterberaten vor allem bei der frühkindlichen Sterblichkeit.

- Als geringst möglicher Wert für die Größe der Exodus-Population der „DieZwölf“ dürfte **73‘000**, als größter Wert **98‘000** als kompatibel mit den Vorgaben des Autors anzusehen sein. Die Größe der Population von Levi stellt sich mit ca. **20‘000** als vergleichsweise unabhängig von den Sterbetafeln heraus. Die Obergrenze für die Gesamtpopulation liegt mit den angewandten Sterberaten bei **118‘000** Personen.

- Der Versuch des Autors,
    i. exegetisch konsequent die Zahlen in Numeri 1 bis 4 zu entschlüsseln und
    ii. diese Zahlen bis auf die letzte Ziffer als real zu akzeptieren sowie
    iii. eine mögliche Bevölkerungsentwicklung in Ägypten numerisch zu simulieren, für die die resultierenden Bevölkerungszahlen die in Numeri 1 bis 4 erkennbaren Bedingungen erfüllt,

  dieser Versuch kann als gelungen angesehen werden.

  Quantitative Kritik an der einen oder anderen noch zu schätzenden Zahl (z.B. Verlust-, Missbildungs-, Unfruchtbarkeits-, Unvermittelbarkeits- Raten oder Heiratsalter) dürften die Gangbarkeit dieses Lösungsweges nicht aufheben. Auch für plausible alternative Verläufe der Reproduktionsraten während des Aufenthalts sind Lösungen möglich. Die Ungewissheit bezüglich der anzusetzenden altersabhängigen Sterbewahrscheinlichkeiten bleibt die Hauptursache für die erhebliche Unsicherheit des Endergebnisses. Diejenige der hier präsentierten Zahlen wird der tatsächlichen Zahl am nächsten liegen, die mit der Sterbetafel erzielt wurde, die der tatsächlichen am nächsten kommt.